

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR
LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Claude GUILLET

1^{re} THÈSE. — L'interférométrie à ondes multiples
appliquée à la détermination de la
répartition de l'indice de réfraction
dans un milieu stratifié.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.
Phénomènes de transport ionique dans
les verres.

Soutenues le 27 mai 1968 devant la Commission d'examen.

MM. MORAND	<i>Président.</i>
FRANÇON	} <i>Examineurs.</i>
PEYCHES	
ACLOQUE	

PARIS
IMPRIMERIE JOUVE
12, Rue de Tournon

1970



Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR
LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Claude GUILLEMET

1^{re} THÈSE. — **L'interférométrie à ondes multiples
appliquée à la détermination de la
répartition de l'indice de réfraction
dans un milieu stratifié.**

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.
**Phénomènes de transport ionique dans
les verres.**

Soutenues le 27 mai 1968 devant la Commission d'examen.

MM. MORAND

Président.

FRANÇON

PEYCHES

ACLOQUE

} *Examineurs.*

PARIS
IMPRIMERIE JOUVE
12, Rue de Tournon

—
1970

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Le Doyen M. ZAMANSKY

MM. PREVOST	T Chimie organique.	BRUSSET	T Chimie systématique.
WYART	T Minéralogie & cristallographie.	LEVY	T Physique théorique des hautes énergies.
TEISSIER	T Zoologie.	Mme CHAIX	T Chimie biologique.
AUGER	T Physique quantique & relativité.	Mme HUREL PY	T Biologie végétale CPEM.
MONNIER	T Physiologie générale.	MM. PANNETIER	T Chimie générale I.
PIVETEAU	T Paléontologie.	NORMANT	T Synthèse organique.
ROCARD	T Physique E. N. S.	YVON	T Théories physiques.
CARTAN	T Mathématiques E. N. S.	COTTE	T Physique électricité.
LAFFITTE	T Chimie générale.	DUBOIS J. E.	T Chimie organique physique.
COULOMB	T Physique du globe.	LAMOTTE	T Zoologie E. N. S.
CHRETIEN	T Chimie minérale.	OLMER	T Énergétique générale.
BOCQUET	T Zoologie.	GAUTHIER	T Mécanique appliquée.
KASTLER	T Physique E. N. S.	BARCHWITZ	T Chimie physique.
EPHRUSSI	T Génétique.	BROSSEL	T Physique atomique.
GAUTHERET	T Biologie végétale CPEM.	BUSER	T Physiologie comparée.
LUCAS R.	T Recherches physiques.	CAMUS	T Physiologie végétale.
THOMAS A.	T Biologie.	CURIEN	T Minéralogie & cristallographie.
MORAND	T Physique enseignement.	POSSOMES	T Zoologie.
SOLEILLET	T Physique CPEM.	PULLMANN	T Chimie quantique.
FORTIER	T Mécanique expérimentale des fluides.	TEILLAC	T Phys. nucléaire & radioactivité.
DRACH	T Biologie maritime.	VILLE	T Économétrie.
QUENEY	T Météorologie & dynamique de l'atmosphère.	FREYMANN	T Recherches physiques.
GALLIEN	T Embryologie.	ROLLET	T Chimie minérale.
Mlle CAUCHOIS	T Chimie physique.	Mlle JOSIEN	T Chimie SPCN.
MM. THELLIER	T Physique du Globe.	MM. CHEVALLEY	T Géométrie alg. & théo. des groupes.
PONCIN	T Mécanique générale.	GERMAIN	T Mécan. Théo. des fluides.
DUBREIL	T Arithmétique & Théorie des nombres.	LUCAS G.	T Géologie.
GAGNIARD	T Géophysique appliquée.	BERTHELOT	T Physique des particules fonda.
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire.	BRICARD	T Météorologie.
CUVILLIER	T Micropaléontologie.	Mme ALBE-FESSARD	T Psycho-physiologie.
TRILLAT	T Microscopie & diffraction électronique.	MM. JULIA	T Étude des molécules naturelles.
WIEMANN	T Chimie organique & structurale.	BRUN	T Mécanique des fluides I.
VASSY	T Physique de l'atmosphère.	Mme DUBREIL	T Mathématiques (Agrégation).
DESTOUCHES	T Théorie physique.	Mme LELONG	T Mathématiques II E. N. S.
AMIEL	T Chimie générale.	MM. BELLAIR	T Géologie S. P. C. N.
MATHIEU J. P.	T Physique optique.	BOUSSIÈRES	T Radiochimie.
COUTEAUX	T Cytologie.	Mme COUTURE	T Thermodynamique & mécan.
CHOQUET	T Théorie des fonctions & topologie.	MM. FRANC	T Biologie animale CPEM.
FELDMANN	T Biologie végétale marine.	SCHNELL	T Botanique tropicale.
JOST	T Physiologie comparée.	STOLKOWSKI	T Physiologie générale.
FORTET	T Calcul des probabilités & physique mathématique.	ACHER	T Chimie biologique.
SCHWARTZ	T Calcul différentiel & intégral.	BAUDOIN	T Biologie animale CPEM.
CHOUARD	T Physiologie végétale.	BEAUMONT	T Biologie animale SPCN.
MALAVARD	T Aviation (technique aéronautique).	BLAMONT	T Géophysique ionosphère.
BRELOT	T Analyse supérieure.	BOUREAU	T Botanique.
EICHHORN	T Botanique.	CURIE D.	T Physique MGP.
BENARD	T Chimie appliquée.	DURAND DELGA	T Géologie.
DUGUE	T Statistique mathématique.	HELLER	T Physiologie végétale.
SOULAIRAC	T Psychophysiologie.	TORTROT	T Calcul des probabilités.
ULRICH	T Physiologie végétale appliquée.	CAILLEUX	T Géologie SPCN.
KIRRMANN	T Théories chimiques.	MAGNAN	T Physique électricité.
CHADEFAUD	T Botanique.	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire.
LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie.	Mme CHOQUET-BRUHAT	T Mécanique analytique et mécanique céleste.
DEVILLERS	T Anatomie comparée.	Mlle VEIL	T Physiologie générale.
EHRESMANN	T Topologie algébrique.	MM. LWOFF	T Microbiologie.
FRANÇON	T Physique SPCN.	SIESTRUNK	T Mécan. Phys. et expérimentale.
GLANGEAUD	T Géographie physique, géologie dynamique.	CABANNES	T Mécanique théorique.
GODEMENT	T Mathématiques MGP.	CAIRE	T Géo. phys. & géo. dynamique.
PISOT	T Techniques mathématiques de la physique.	COMOLET	T Mécanique des fluides.
ROCH	T Géologie.	DELLOU	T Physique de l'exosphère.
SCHATZMANN	T Astrophysique.	HOUILLOIN	T Biologie animale.
TERMIER	T Géologie générale.	OLIVIER	T Anthropologie.
ZAMANSKY	T Mathématiques générales.	SAMUEL	T Math. (ENS jeunes filles).
LENNUIER	T Physique M. G. P.	DE POSSEL	T Analyse numérique.
ROUTHIER	T Géologie appliquée.	CHARLOT	T Chimie analytique.
Mme TONNELAT	T Physique théorique.	CHATELET	T Chimie CPEM.
MM. DIXMIER	T Mathématiques M. P. C.	MATTLER	T Physique SPCN.
SOUCHAY	T Chimie générale.	AUBOUIN	T Géologie.
AGRAIN	T Electrotechnique.	Mme BENOIT-GEUTAL	T Phys. nucléaire & radioact.
		MM. BOUGIS	T Bio. vég. marine Villefranche s/mer.
		RIGAUDY	T Chimie SPCN.
		COLLONGUES	T Chimie appliquée.
		DUBERT	T Biochimie.
		NOZIERES	T Physique fondamentale.
		CADIOT	T Chimie organique.

(suite en dernière page)



A MES FILLES

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur MORAND pour avoir bien voulu patronner ce travail, et lui avoir apporté son précieux conseil.

Je tiens aussi à remercier vivement les Services de Recherches de la Compagnie de SAINT-GOBAIN qui m'ont apporté leur collaboration et particulièrement leur directeur, Monsieur PEYCHÈS, membre de l'Institut, pour m'avoir autorisé à effectuer cette étude et à la publier, Monsieur ACLOQUE, directeur des Laboratoires Scientifiques, pour les encouragements et l'aide qu'il m'a prodigués ainsi que Messieurs CLÉMENTINE et BONNETIN, physiciens, pour le soin avec lequel ils ont effectué certaines expériences à la base de ce travail.

L'INTERFÉROMÉTRIE À ONDES MULTIPLES APPLIQUÉE À LA DÉTERMINATION DE LA RÉPARTITION DE L'INDICE DE RÉFRACTION DANS UN MILIEU STRATIFIÉ

par Claude GUILLEMET

Ci^e de Saint-Gobain, Paris

SOMMAIRE. — Après un rappel des lois de la propagation de la lumière dans un milieu stratifié, on analyse théoriquement et expérimentalement les interférences à ondes multiples localisées à l'infini et créées par la lumière réfléchie totalement sur les couches internes d'un tel milieu. On recherche, en particulier, les conditions expérimentales donnant le meilleur contraste et la plus grande finesse des franges et l'on décrit un appareil appelé *stratoréfractomètre* adapté à la détermination des variations de l'ordre d'interférence en fonction de l'incidence de la lumière. On montre ensuite théoriquement que la connaissance de ces variations permet de calculer la répartition de l'indice et éventuellement de la biréfringence dans le milieu stratifié.

On présente deux applications se rapportant à des feuilles de verre sodocalcique dans les couches superficielles desquelles on a procédé, par diffusion chimique, à une substitution des ions sodium.

La première application concerne un échange $\text{Na}^+ \rightarrow \text{Li}^+$ pendant un temps long par rapport au temps de relaxation du verre. On montre que dans ce cas on peut déterminer la variation de concentration en lithium et évaluer le coefficient de diffusion.

La seconde application traite de l'échange $\text{Na}^+ \rightarrow \text{K}^+$ pendant un temps court par rapport au temps de relaxation du verre. On détermine les variations de l'indice de réfraction pour les vibrations lumineuses respectivement parallèle et perpendiculaire au gradient de concentration. On en déduit les variations de contraintes dans les couches où a eu lieu l'échange ionique.

SUMMARY. — After summarizing light propagation phenomena in a stratified medium, a theoretical and experimental study is made of multiple wave interferences localized at infinity and obtained by totally reflected light on inner layers within the medium. Specifically, experimental conditions for maximum contrast and line sharpness are investigated and a description is given of an instrument called « *stratoréfractometer* » suitable for measuring changes of interference order when the incidence of light is varied. It is shown theoretically that the measured variations allow the determination of the distribution of the refractive index and of the birefringence within the stratified medium.

Two examples are given referring to soda lime glass sheets on the upper layers of which a sodium ion substitution has been performed by chemical diffusion.

The first example concerns $\text{Na}^+ \rightarrow \text{Li}^+$ exchange for a time long compared with the glass relaxation time. In this case, it is possible to determine changes in Li concentration and hence derive the diffusion constant.

The second example deals with $\text{Na}^+ \rightarrow \text{K}^+$ exchange for a time short compared to the relaxation time. Changes in refractive index are determined for polarisation parallel and perpendicular to the concentration gradient. Variation of stress is calculated within the layers where the ionic exchange took place.

I. Introduction

1. **Influence des échanges d'ions sur les propriétés des verres.** — Il existe actuellement de nombreux procédés pour modifier la composition superficielle des verres [1]. Dans leur grande majorité, ces procédés consistent à produire le remplacement des ions alcalins par d'autres ions alcalins, des ions hydrogène ou des ions de métaux tels que l'argent ou le cuivre. Ces échanges ioniques sont obtenus par agitation thermique en mettant au contact du verre porté à une température convenable un milieu qui contient les ions devant diffuser dans le verre. Ils présentent un intérêt pratique considérable car ils sont susceptibles d'entraîner des variations importantes des diverses propriétés des verres.

1. **Les propriétés optiques.** — D'une part, les échanges ioniques, en modifiant l'indice de réfraction des couches superficielles, font varier le facteur de réflexion.

D'autre part, les ions argent, cuivre ou or ont tendance à se regrouper après diffusion dans le verre et à former des particules métalliques, ce qui entraîne des colorations variables suivant la dimension de ces particules.

2. **Les propriétés électriques.** — Les échanges ioniques concernent les ions qui participent au transport du courant électrique dans les verres. Puisque chaque sorte d'ions est caractérisée par une énergie de liaison et une mobilité, tout échange d'ions modifie les propriétés électriques superficielles.

3. **Les propriétés chimiques.** — La résistance à l'eau et aux acides est grandement influencée par le remplacement des ions alcalins dans les couches superficielles par des ions dont le champ de forces est différent.

4. **Les propriétés mécaniques.** — Les échanges ioniques produisent des variations du coefficient de dilatation et du volume molaire des couches superficielles. Si la température et le temps des réactions sont bien choisis, des contraintes de compression s'installent dans les couches superficielles ce qui a pour effet de multiplier la résistance mécanique par un facteur pouvant être de l'ordre de 10.

2. **Les méthodes d'examen des couches superficielles.** — L'importance industrielle de ces réactions d'échange ionique justifie l'application d'un certain nombre de méthodes d'examen à la détermination des profils de concentration des ions ayant participé à l'échange. Dans les méthodes actuelles, on procède soit à des décapages successifs, soit à un examen par la tranche.

1. **Techniques reposant sur le décapage.** — Les techniques de cette catégorie consistent à prélever des couches fines successives soit par dissolution dans l'acide fluorhydrique, soit par abrasion et à effectuer le dosage sur la matière ainsi extraite ou sur le verre restant. L'analyse est pratiquée, par exemple, par photométrie de flamme, à l'aide de traceurs radioactifs [2], ou par spectrométrie de rayons X [3].

2. **Techniques reposant sur l'examen par la tranche.** — Lorsque la méthode d'analyse est suffisamment ponctuelle, comme c'est le cas lorsqu'on utilise la microsonde électronique, on peut obtenir le gradient de concentration en procédant à un balayage de la tranche de l'échantillon [4 à 6]. A cette catégorie, se rattache l'interférométrie qui, si l'on connaît la relation entre l'indice de réfraction

et la composition, fournit également le gradient de concentration d'après la variation de l'indice [5, 6].

Les techniques de la première catégorie obligent à de longues manipulations; celles de la seconde nécessitent un usinage très soigné de l'échantillon et toutes présentent un caractère destructif. La recherche d'une méthode d'examen non destructive, d'application rapide, nous a donc paru correspondre à un besoin réel. Or, nous savons qu'un gradient de composition entraîne un gradient d'indice de réfraction et que, dans un milieu où l'indice varie, les rayons lumineux sont courbes. Certains auteurs [7, 8] ont mis en évidence la résurgence de la lumière par suite de ce phénomène dans les couches superficielles des verres industriels. On peut penser qu'en faisant varier l'incidence de la lumière, on atteint des profondeurs diverses et qu'ainsi, tout comme par le décapage, on recueille des informations sur les couches successives.

Le but de ce travail est la mise au point et les applications d'une méthode d'examen reposant sur ces considérations.

II. Propagation de la lumière dans un milieu stratifié

1. **Généralités.** — On appelle milieu stratifié un milieu M dont les propriétés varient suivant une direction fixe mais sont constantes dans chaque plan normal à cette direction. Ces plans sont appelés strates ou couches. Nous dirigerons l'axe des z d'un système cartésien de référence lié au milieu M parallèlement à la direction privilégiée et nous supposerons le milieu M parfaitement transparent. La propagation de la lumière dans un tel milieu a fait l'objet d'études générales reposant sur la théorie électromagnétique [9]. Pour notre propos, nous nous limiterons au cas où les variations de l'indice de réfraction n sont continues et nous énoncerons quelques propriétés élémentaires indépendantes de la nature du rayonnement.

Rappelons d'abord que si le milieu M n'est pas biréfringent, les trajectoires de l'énergie (rayons lumineux) sont normales aux surfaces d'onde ou surfaces équiphases [10]. Si on procède à un passage à la limite à partir d'un empilement de lames à faces parallèles, les lois de Descartes s'expriment de la façon suivante :

a) chaque rayon lumineux est contenu dans un plan parallèle à Oz ;

b) si on appelle r l'angle du rayon avec Oz, le produit $n \sin r$ conserve la même valeur en tous les points de la trajectoire. Nous appellerons le produit $n \sin r$ l'incidence v du rayon.

En écrivant que la différentielle de $n \sin r$ est identiquement nulle, on obtient, le long d'un rayon,

$$(1) \quad dr = - \operatorname{tg} r \frac{dn}{n}.$$

Or, si le sens positif sur le rayon est celui des z croissants, la courbure du rayon vaut

$$\frac{1}{R} = \frac{dr}{dz} \cos r,$$

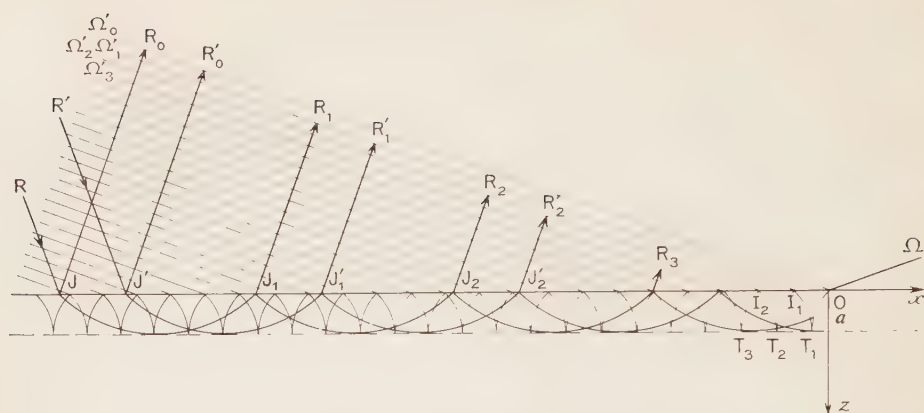


FIG. 1. — Propagation de la lumière dans un milieu stratifié.

d'où, compte tenu de (1),

$$\frac{1}{R} = -\frac{\sin r}{n} \frac{dn}{dz} = -\frac{v}{n^2} \frac{dn}{dz}.$$

2. Principe de la méthode de détermination de la répartition de l'indice de réfraction. — Pour la suite de l'exposé, nous devons faire les hypothèses suivantes :

- a) le milieu M est limité par un plan parallèle aux strates, que nous prenons comme plan xy . Oz est orienté positivement vers le milieu M ;
- b) l'indice n_0 de M dans le plan xy n'est pas le plus petit indice de M ;
- c) le milieu M' contigu à M le long du plan xy est homogène et son indice n' est supérieur à tous les indices qu'on rencontre dans M.

Dans le plan de la figure 1, qui est le plan xz , on a représenté la trace, à un instant donné, d'une onde incidente plane Ω provenant de M'. Nous appelons incidence de cette onde l'incidence v des rayons qui lui correspondent. Nous supposons que $n_0 > v$ mais qu'il existe des valeurs de z pour lesquelles $n(z) = v$; soit a la plus petite de ces valeurs.

Sur la figure 1, Ω'_0 est le plan d'onde réfléchi sur le plan xy . OT_1 est la trace de l'une des nappes de l'onde transmise qui est une onde cylindrique de génératrices parallèles à Oy . Puisque le plan de séparation xy est parallèle aux strates, les rayons relatifs à cette onde se déduisent les uns des autres par translation parallèle à Ox . Il en résulte que la normale en chaque point de la surface d'onde fait avec Oz un angle r tel que $n \sin r = v$. La courbure de la surface d'onde dans le plan d'incidence (plan xz) vaut

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2 r}{n \cos r} \frac{dn}{dz} = \frac{v^2}{n^2 (n^2 - v^2)^{1/2}} \frac{dn}{dz}.$$

Pour $z = a$, le plan tangent à l'onde est parallèle à Oz et l'onde présente une arête de rebroussement parallèle à Oy .

$T_1 I_1$ constitue la trace de la seconde nappe, symétrique de la nappe OT_1 par rapport au plan parallèle à yz contenant l'arête de rebroussement. Ω'_1 est l'onde qui a retraversé le plan xy et $I_1 T_2 I_2$ l'onde qui s'est réfléchi sur le plan xy .

A son tour, cette dernière onde subit le processus de division en I_2 et ainsi de suite. Pour avoir la position des diverses surfaces d'onde au bout d'un temps t , il suffit de transférer l'ensemble de la figure dans la direction Ox d'une longueur égale à $(c/v) t$, où c représente la vitesse de la lumière dans le vide.

Nous dirons dans la suite que les ondes $\Omega'_0, \Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_p$ sont, respectivement, d'ordres 0, 1, 2, ..., p. Dans le milieu M' ces ondes sont planes et parallèles.

L'écart constant χ de deux ondes successives, mesuré parallèlement à Ox , vaut

$$(2) \quad \chi = OI_1 = 2 \int_0^a \cotg r \, dz = \frac{2}{v} \int_0^a [n^2(z) - v^2]^{1/2} \, dz,$$

avec $n(a) = v$.

Négligeant l'influence de la diffraction, on peut dire que si l'onde incidente Ω est limitée latéralement par les rayons RJ et $R'J'$, l'onde Ω'_0 est limitée par les rayons JR_0 et $J'R'_0$, l'onde Ω'_1 par les rayons J_1R_1 et $J'_1R'_1$, l'onde Ω'_2 par les rayons J_2R_2 et $J'_2R'_2$, ... Dans le milieu M , les rayons sont les trajectoires orthogonales des traces des surfaces d'onde. A chaque onde correspond un faisceau de rayons. Le décalage entre deux faisceaux mesuré suivant Ox vaut

$$(3) \quad \xi = JJ_1 = 2 \int_0^a \tg r \, dz = 2v \int_0^a \frac{dz}{[n^2(z) - v^2]^{1/2}}.$$

Comme $n' > n_0$ la réflexion sur le plan xy n'introduit pas de déphasage. Nous allons exprimer les phases des ondes $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_p$ par rapport à l'onde Ω'_0 . Pour parcourir la distance $I_1O = \chi$, l'onde Ω'_1 met un temps égal à $\chi v/c$ qui correspond à un déphasage

$$(4) \quad \varphi = 2\pi v \chi / \lambda,$$

où λ représente la longueur d'onde de la lumière dans le vide. Compte tenu de (2), on obtient ⁽¹⁾

$$(5) \quad \varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^a [n^2(z) - v^2]^{1/2} \, dz.$$

En introduisant les déphasages de π produits par les réflexions sous l'incidence rasante en $T_1, T_2, T_3, \dots$ et par les réflexions sur un milieu plus réfringent en $I_1, I_2, I_3, \dots$, on trouve que, à 2π près, les phases respectives de $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3, \dots$ par rapport à Ω'_0 sont $\varphi + \pi, 2\varphi + \pi, 3\varphi + \pi, \dots$

Le principe de la méthode que nous exposons consiste à déterminer expérimentalement la fonction $\varphi(v)$ en observant les interférences à l'infini des ondes réfléchies sur les strates puis, connaissant $\varphi(v)$, à calculer à partir de la relation (5) la fonction $n(z)$.

Dans la troisième partie de cette étude nous examinons différents cas d'interférence des ondes réfléchies; dans la quatrième nous décrivons le dispositif que nous utilisons pour la détermination pratique de $\varphi(v)$; dans la cinquième nous recherchons comment il est possible de déduire $n(z)$ connaissant $\varphi(v)$; enfin dans la sixième nous présentons quelques applications à l'étude de processus de diffusion ionique dans les verres.

⁽¹⁾ Il va sans dire que l'expression de φ peut également se déduire de l'intégration depuis $z = 0$ jusqu'à $z = a$ de l'expression classique du déphasage introduit par une lame à faces parallèles.

III. Etude des interférences à l'infini des ondes réfléchies dans le milieu stratifié sous différentes conditions

Faisons converger les ondes $\Omega'_0, \Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_p$ dans le plan focal d'un objectif (fig. 2). Elles y interfèrent. Nous allons examiner l'éclairement dans ce plan en supposant que le milieu M est éclairé par une source monochromatique étendue.

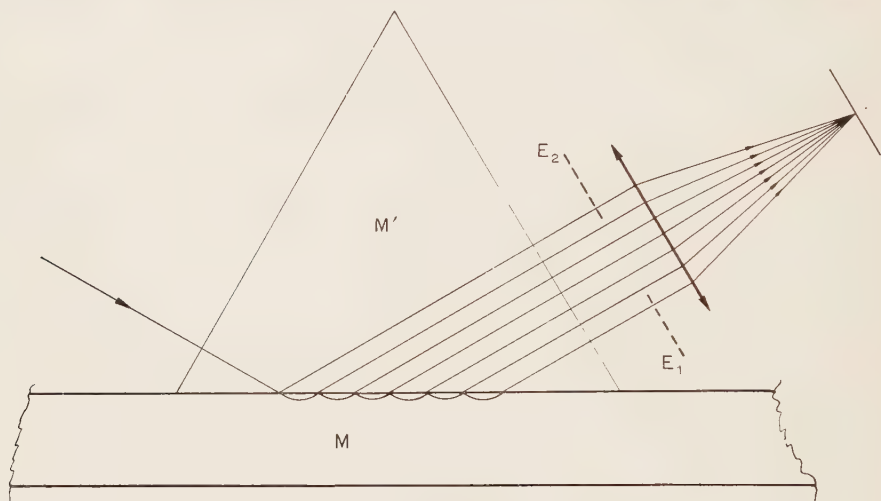


FIG. 2. — Interférences des ondes réfléchies par le milieu stratifié.

Appelons ρ le rapport des amplitudes réfléchi et incidente sur le plan xy , τ le rapport des amplitudes transmise et incidente pour une onde qui pénètre dans M et τ' le même rapport pour une onde qui en émerge. Prenons l'amplitude de l'onde incidente Ω égale à 1 et négligeons les pertes par absorption ou diffusion dans le milieu M. Les amplitudes complexes des ondes $\Omega'_0, \Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_p$ sont respectivement :

$$\rho, \tau\tau' e^{-i(\varphi+\pi)}, \tau\tau'\rho e^{-i(2\varphi+\pi)}, \dots, \tau\tau'\rho^{p-1} e^{-i(p\varphi+\pi)},$$

la phase de Ω'_0 étant prise comme origine.

La vibration S dans le plan focal peut être considérée comme la superposition de l'onde Ω'_0 réfléchi sur le plan xy et de l'onde ω , résultante des ondes $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_p$ qui ont pénétré dans le milieu M et traversé l'objectif et dont les amplitudes complexes forment une série d'Airy.

Compte tenu que $\tau\tau' = 1 - \rho^2$ [11], l'amplitude complexe s de S peut s'écrire

$$(6) \quad s = \rho + (1 - \rho^2) e^{-i(\varphi+\pi)} + (1 - \rho^2) \rho e^{-i(2\varphi+\pi)} + \dots + (1 - \rho^2) \rho^{p-1} e^{-i(p\varphi+\pi)}$$

ou encore

$$(7) \quad s = \rho - (1 - \rho^2) e^{-i\varphi} \frac{1 - \rho^p e^{-ip\varphi}}{1 - \rho e^{-i\varphi}}.$$

On voit que s est fonction du facteur de réflexion ρ , du nombre p d'ondes recuei-

lies et de l'incidence ν des ondes par l'intermédiaire de φ .

Nous allons successivement envisager quatre cas de superposition.

1. Toutes les ondes réfléchies sont recueillies par l'objectif. — Pratiquement nous pourrions admettre que toutes les ondes réfléchies sont recueillies :

a) soit si la dimension suivant Ox du milieu M et le diamètre de l'objectif sont grands par rapport à ξ , à χ et à la largeur JJ' du faisceau incident ;

b) soit si le facteur de réflexion ρ est petit.

On a alors, en rendant p infini dans (7),

$$s = \rho - (1 - \rho^2) \frac{e^{-i\varphi}}{1 - \rho e^{-i\varphi}},$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{\rho - e^{-i\varphi}}{1 - \rho e^{-i\varphi}} = \frac{2\rho - (1 + \rho^2) \cos \varphi + i(1 - \rho^2) \sin \varphi}{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2}.$$

L'intensité de S vaut $|s|^2 = s s^* = 1$.

On voit, d'après ce résultat, que si l'on fait varier l'incidence ν de Ω , c'est-à-dire si l'on éclaire M avec de la lumière convergente, l'éclairement dans le plan focal de l'objectif est uniforme et est le même que si l'objectif recevait directement les ondes incidentes.

Sur la figure 3, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ représente, suivant la construction de Fresnel, l'onde S . Le point M décrit le cercle de rayon 1 centré à l'origine. $\overrightarrow{OR}$, situé sur l'axe de référence et de longueur ρ , représente l'onde Ω'_0 et $\overrightarrow{RM}$ l'onde ω .

La phase Φ de S est donnée par

$$\sin \Phi = \frac{(1 - \rho^2) \sin \varphi}{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2}$$

Les variations de φ et de Φ sont donc liées ; en particulier, φ et Φ prennent des valeurs multiples de π simultanément. La détermination expérimentale des variations de Φ permet donc de déduire celles de φ .

Sur la figure 4 on a représenté un dispositif interférentiel constitué de deux lames de verre à faces parallèles collées, qui permettrait de connaître la phase Φ de S en utilisant une onde de référence qui interfère avec S . Mais nous allons voir qu'il est possible d'obtenir des franges d'interférences dans le plan focal sans pour cela utiliser une onde de référence.

2. L'objectif ne recueille pas les ondes réfléchies d'ordre élevé. — 1. *Expression de l'éclairement.* — Si l'onde Ω est limitée par un pinceau étroit et si la dimension utile de M suivant Ox est égale à $p \xi$, on ne recueille que les ondes d'ordre infé-

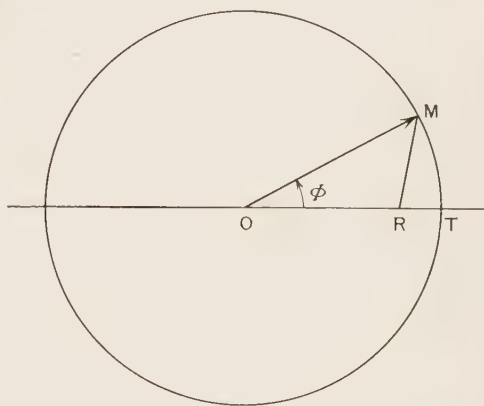
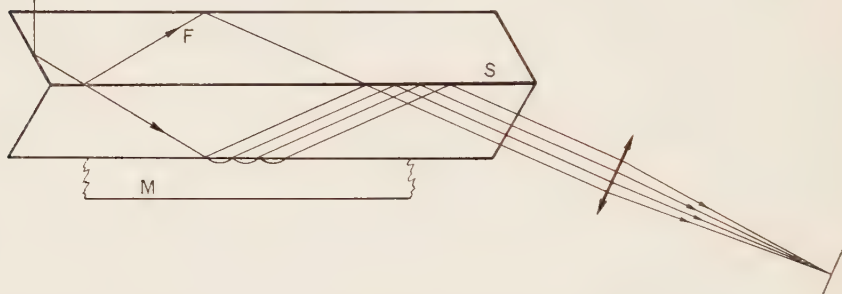


FIG. 3. — Représentation de la vibration lumineuse dans le plan focal.

FIG. 4. — Emploi d'une onde de référence pour déterminer la phase des ondes réfléchies:
F, faisceau de référence ; S, surface semi-réfléchissante ; M, milieu stratifié.



rieur à p . On voit, par exemple, que si (fig. 1) le pinceau incident est limité par les rayons R et R' et si la partie utile de M est limitée par le plan yz , on ne recueille pas les ondes d'ordre supérieur à 2.

Transformons l'expression de s donnée par (7) :

$$s = \frac{\rho - e^{-i\varphi} + \rho^p (1 - \rho^2) e^{-i(p+1)\varphi}}{1 - \rho e^{-i\varphi}} ;$$

cherchons l'éclairement dans le plan focal :

$$(8) \quad |s|^2 = 1 - \rho^p (1 - \rho^2) \frac{2 \cos p \varphi - 2 \rho \cos (p+1) \varphi - \rho^p (1 - \rho^2)}{1 - 2 \rho \cos \varphi + \rho^2} ,$$

φ étant une fonction de l'incidence ν donnée par l'équation (5).

On constate, d'après (8), que lorsqu'on ne recueille pas les ondes d'ordre supérieur à p , l'éclairement dans le plan focal est une fonction périodique de φ , de période 2π et dont le nombre d'extremums par période de 2π est égal à $2p$.

Les minimums σ de $|s|^2$ sont atteints pour $\varphi = 2k\pi$, où k est un entier et l'on a

$$\sigma = [1 - \rho^p (1 + \rho)]^2 .$$

Pour $\varphi = (2k+1)\pi$ et p impair, $|s|^2$ prend une valeur maximale

$$\Sigma_1 = [1 + \rho^p (1 - \rho)]^2 .$$

Pour $\varphi = (2k+1)\pi$ et p pair, $|s|^2$ prend une valeur minimale

$$\Sigma_2 = [1 - \rho^p (1 - \rho)]^2 .$$

2. Etude détaillée du phénomène sur un exemple. — Pour mieux se représenter l'influence de p et de φ nous allons admettre que ρ est constant dans le petit domaine d'incidence qui correspond pour φ à une variation de 2π et nous prendrons $\rho = 3/4$.

Il est facile de suivre, pour une valeur donnée de φ , l'évolution de s au fur et à mesure que p varie en effectuant, par la règle de Fresnel, l'addition des vibrations exprimée par l'équation (6). La figure 5 montre les constructions relatives aux valeurs de φ suivantes : $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $5\pi/6$. Le vecteur $\overline{OR}$ représente l'onde réfléchie Ω'_0 sur M. Sa longueur est égale à ρ . Les points a, b, c, ... sont les

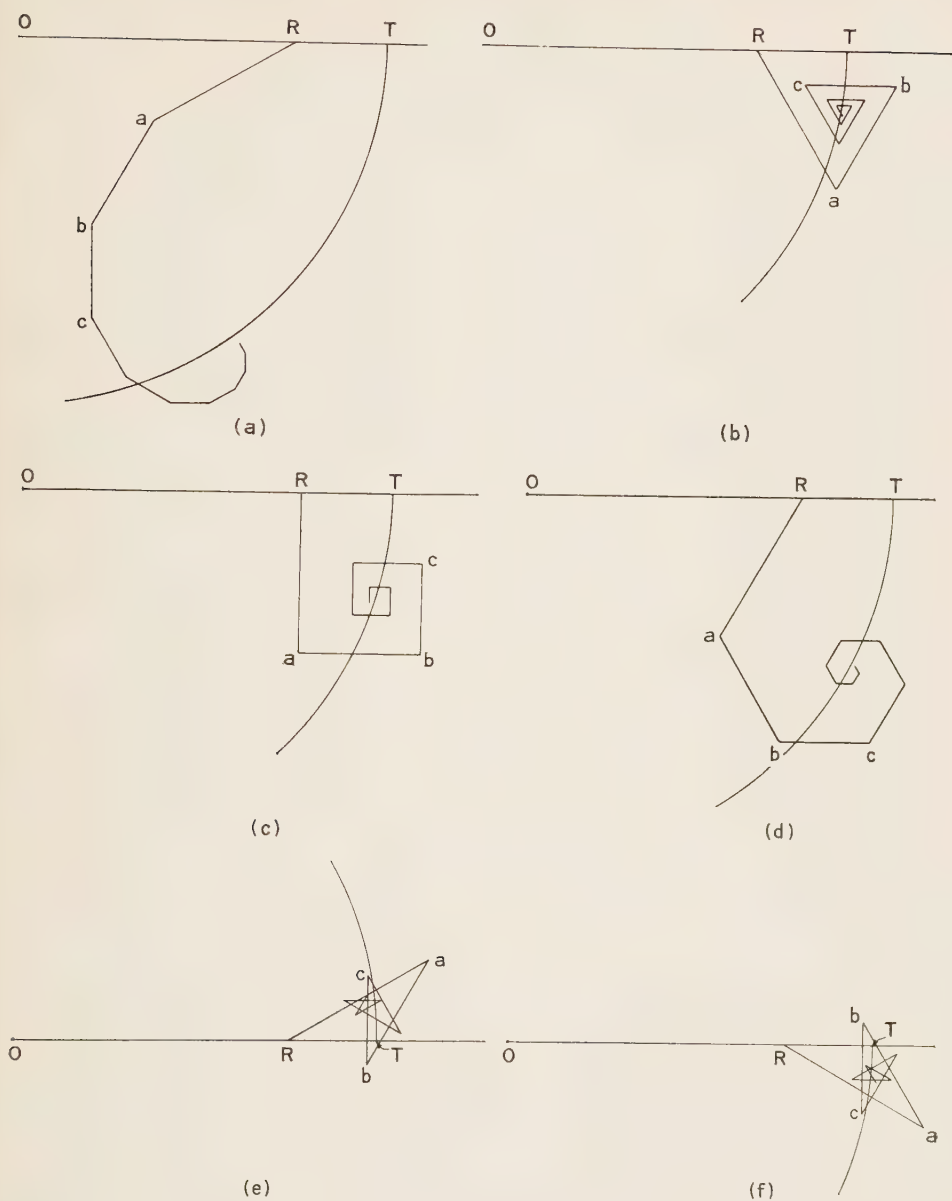


FIG. 5. — Construction de la vibration dans le plan focal pour diverses valeurs du déphasage lorsqu'on ne recueille pas les ondes d'ordre élevé : a) $\varphi = \pi/6$, b) $\varphi = 2\pi/3$, c) $\varphi = \pi/2$, d) $\varphi = \pi/3$, e) $\varphi = 7\pi/6$, f) $\varphi = 5\pi/6$.

extrémités des vecteurs d'origine O qui représentent s lorsqu'on recueille respectivement $p = 1, 2, 3, \dots$ ondes dans l'objectif en plus de l'onde Ω'_0 . Le vecteur $\vec{OT}$ de longueur 1 représente la vibration dans le plan focal si on recueille directement l'onde incidente Ω .

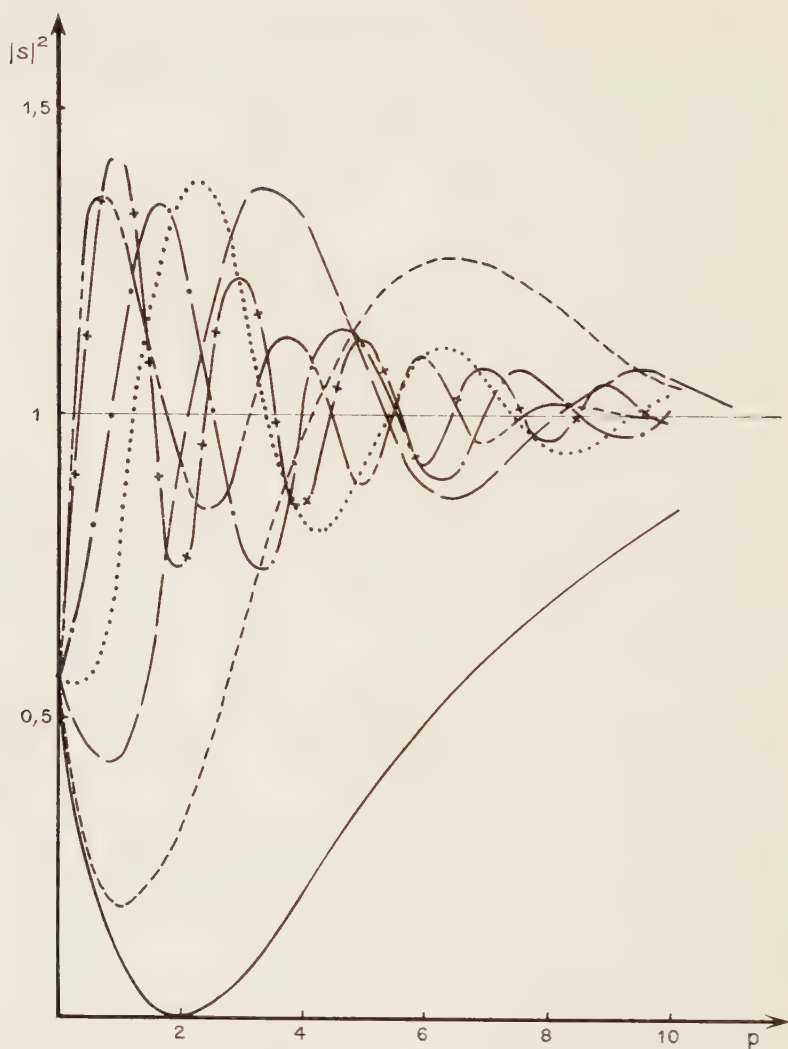


FIG. 6. — Variation de l'éclairement en fonction du nombre d'ondes recueillies pour diverses valeurs du déphasage : $\varphi = 0$ (—), $\varphi = \pi/6$ (---), $\varphi = \pi/3$ (- · - · -), $\varphi = \pi/2$ (.....), $\varphi = 2\pi/3$ (— · — · —), $\varphi = 5\pi/6$ (— · · — · ·), $\varphi = \pi$ (- + -).

La figure 6 montre la variation de l'éclairement dans le plan focal pour les valeurs de φ précédentes en fonction du nombre p d'ondes recueillies. On a pris pour représenter l'éclairement le carré des longueurs des vecteurs $\vec{Oa}$, $\vec{Ob}$, $\vec{Oc}$, ... mesurées sur la figure 5. L'unité d'éclairement est l'éclairement du plan focal si l'objectif reçoit directement les ondes incidentes. On voit que l'éclairement tend vers 1 quand p augmente, quel que soit φ , ce qui est en accord avec les résultats du paragraphe II.1.

La figure 7 représente la variation de l'éclairement en fonction de φ pour

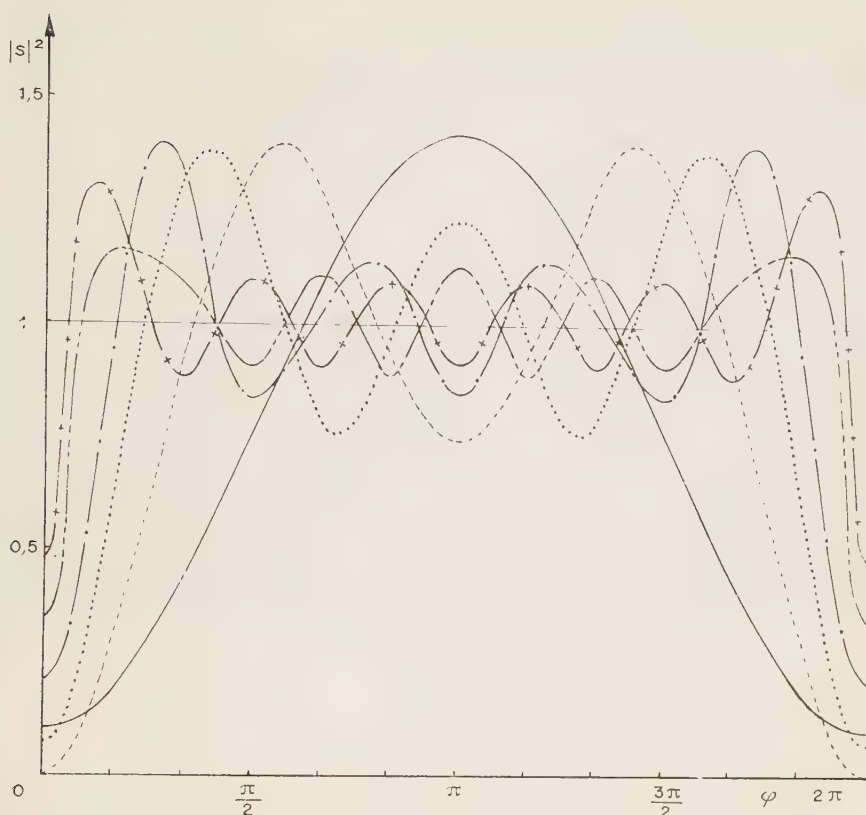


Fig. 7. — Variation de l'éclairement en fonction du déphasage φ pour diverses valeurs du nombre d'ondes recueillies :

$p = 1$ (—), $p = 2$ (-----), $p = 3$ (.....), $p = 4$ (- · - · -), $p = 5$ (- - - - -), $p = 6$ (- + -).

diverses valeurs de p . On voit que lorsqu'on recueille peu d'ondes, on a des franges sombres bien marquées pour $\varphi = 2k\pi$, alors que, lorsque p devient grand, le contraste diminue.

3. Vérification expérimentale. — La vérification expérimentale qualitative de ces résultats est facile à réaliser (fig. 2). On prend, par exemple, comme milieu M une feuille de verre à vitre dans les couches superficielles de laquelle a eu lieu un échange ionique qui a fait croître l'indice de réfraction. Le milieu M' est un prisme de verre d'indice élevé. Le contact optique est assuré par une couche de liquide. Un pinceau étroit de lumière verte du mercure est reçu par la face de contact après traversée du prisme. Si les incidences ν des rayons qui constituent le pinceau se trouvent dans le domaine de variation de l'indice des couches superficielles de la feuille de verre, les ondes $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_p$ existent. La figure 8 est la photographie de la section des pinceaux par la face de sortie du prisme. On peut constater la décroissance de l'énergie transportée par les pinceaux successifs. La figure 9



FIG. 8. — Photographie des pinceaux lumineux réfléchis par le milieu stratifié.

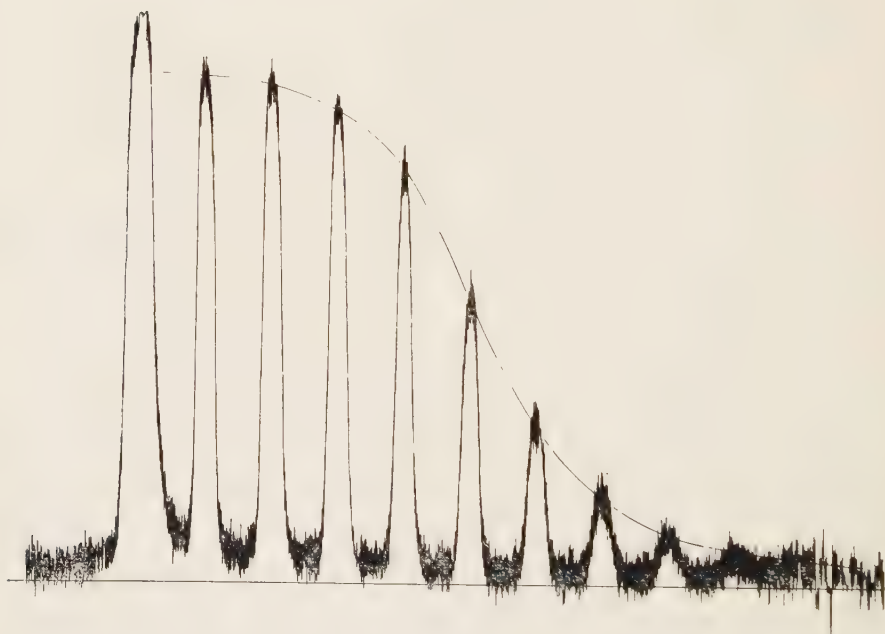


FIG. 9. — Densités optiques de la photographie de la figure 8.

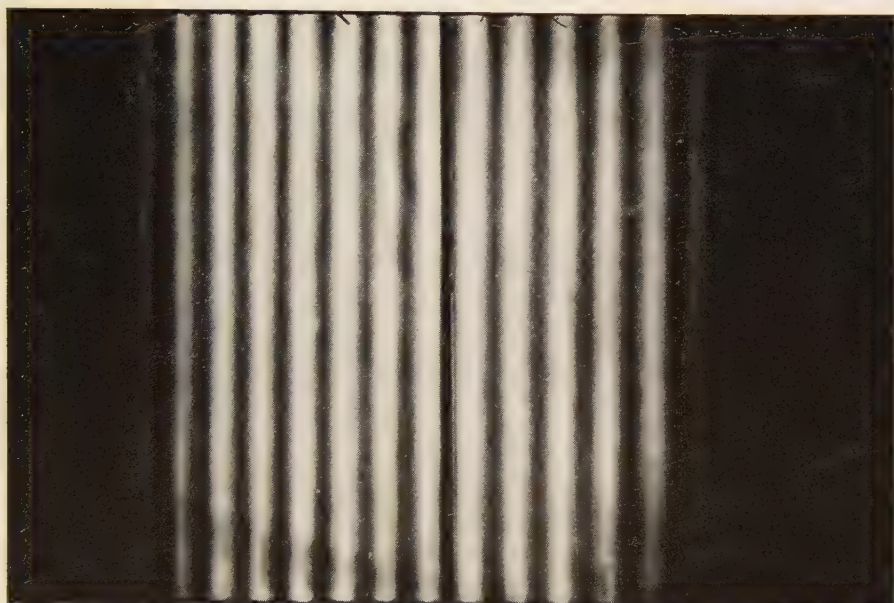


FIG. 10. — Photographie des franges dans le plan focal lorsque l'objectif ne recueille que les ondes Ω'_0 , Ω'_1 et Ω'_2 .

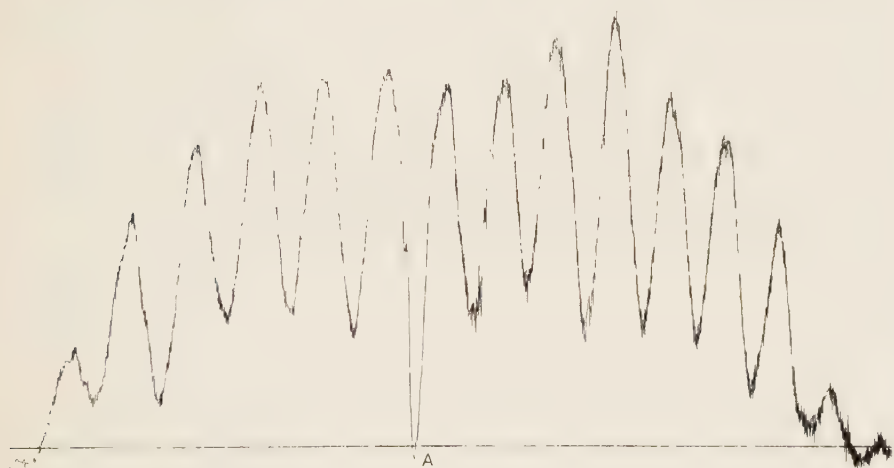


FIG. 11. — Densités optiques de la photographie de la figure 10.

représente l'enregistrement des densités optiques du négatif de la photographie précédente réalisé sur film Agfa AGEPE F.F. à émulsion orthochromatique. Si on exclut le premier maximum qui est relatif à Ω'_0 , les éclaircissements correspondant aux maximums constituent une progression géométrique de raison ρ^2 . Comme ces maximums sont équidistants, la courbe qui les joint n'est autre que la courbe caractéristique de l'émulsion.



FIG. 12. — Variation de l'éclairement en fonction du nombre p d'ondes recueillies lorsqu'on élimine Ω_0 : $\varphi = 0$ (—), $\varphi = \pi/6$ (---), $\varphi = \pi/3$ (-·-·-), $\varphi = \pi/2$ (···), $\varphi = \pi$ (—).

Si on recueille les ondes réfléchies dans une lunette afocale, après interposition d'un écran E_1 (fig. 2) qui arrête les ondes d'ordre élevé, on observe des franges puisque φ augmente lorsque v diminue. Chaque frange sombre correspond à une valeur de v pour laquelle $\varphi = 2k\pi$. Les franges ont donc la forme d'ellipses que l'on peut confondre avec des droites. Lorsqu'on déplace l'écran E_1 dans son plan devant la face de sortie du prisme, les franges ne se déplacent pas, mais leur contraste varie.

La figure 10 est la photographie des franges observées à travers la lunette lorsque l'écran E_1 ne laisse passer que les ondes Ω'_0 , Ω'_1 et Ω'_2 . La figure 11 est l'enregistrement densitométrique du négatif de la photographie précédente. Le minimum A observé sur l'enregistrement correspond à la présence dans le plan focal de l'objectif d'un fil de réticule servant de repère. Notons que ce repère se trouve à l'emplacement d'un minimum d'éclairement.

3. L'objectif ne recueille pas l'onde réfléchie d'ordre 0. — 1. *Expression de l'éclairement.* — Si on arrête l'onde Ω'_0 , la vibration qui produit l'éclairement dans le plan focal de l'objectif est alors l'onde ω dont l'amplitude complexe est, d'après (7),

$$(9) \quad s = - (1 - \rho^2) e^{-i\varphi} \frac{1 - \rho^p e^{-ip\varphi}}{1 - \rho e^{-i\varphi}}.$$



FIG. 13. — Variation de l'éclairement en fonction du déphasage φ lorsqu'on élimine Ω'_0 :
 $p = 1$ (—), $p = 2$ (- - -), $p = 3$ (.....), $p = 4$ (- · - · -), $p = 5$ (— — —), $p = \infty$ (— · — · —).

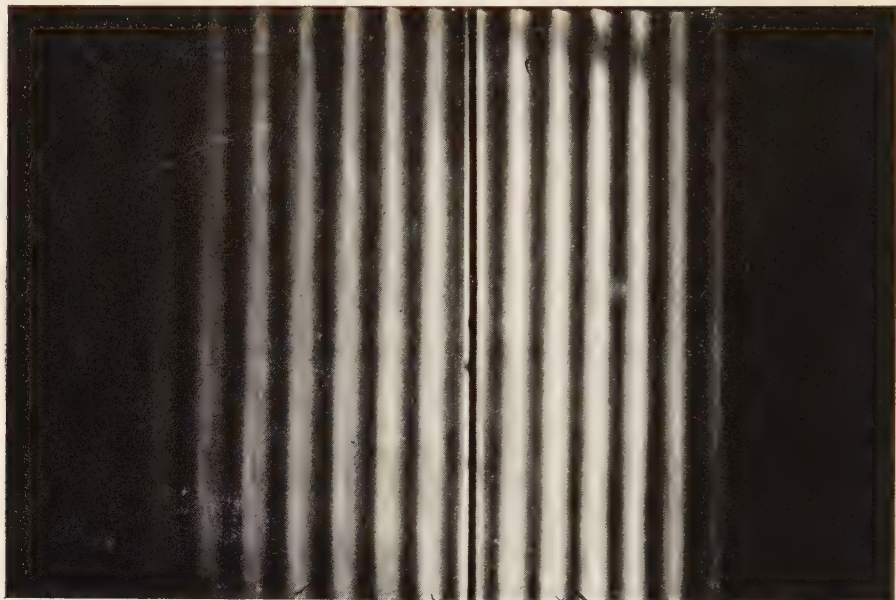


FIG. 14. — Photographie des franges lorsqu'on élimine Ω_0 .

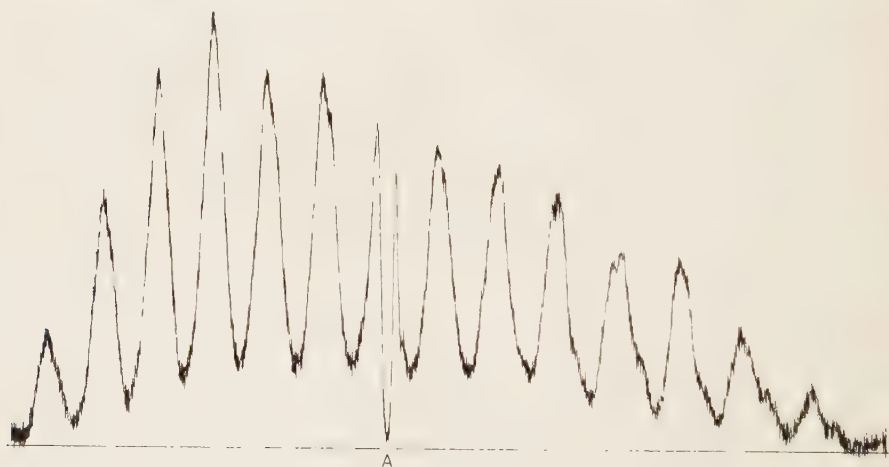


FIG. 15. — Densités optiques de la photographie de la figure 14.

L'éclairement dans le plan focal varie comme

$$(10) \quad |s|^2 = (1 - \rho^2)^2 \frac{1 - 2 \rho^p \cos p \varphi + \rho^{2p}}{1 - 2 \rho \cos \varphi + \rho^2};$$

$|s|^2$ est une fonction périodique de φ , de période 2π , qui prend ses maximums Σ' pour $\varphi = 2k\pi$ (k entier) :

$$\Sigma' = (1 + \rho^2)^2 (1 - \rho^p)^2.$$

2. *Etude détaillée du phénomène sur un exemple.* — Prenons, comme au paragraphe III.2.2, $\rho = 3/4$. La construction de Fresnel, représentée sur la figure 5, permet de trouver géométriquement l'amplitude s . Les vecteurs $\vec{Ra}$, $\vec{Rb}$, $\vec{Rc}$, ... représentent cette amplitude lorsqu'on recueille respectivement $p = 1, 2, 3, \dots$ ondes dans l'objectif, l'onde Ω'_0 étant éliminée.

La figure 12 représente la variation de l'éclairement en fonction du nombre p d'ondes recueillies pour diverses valeurs de φ .

La figure 13 montre la variation de l'éclairement en fonction de φ pour diverses valeurs de p . On voit que les franges claires s'affinent quand p augmente et que le contraste est inversé par rapport au cas précédent.

3. *Vérification expérimentale.* — Comme précédemment la vérification expérimentale a été réalisée à l'aide du dispositif de la figure 2.

La seule modification consiste en l'interposition d'un écran E_2 qui arrête l'onde Ω'_0 . Le système de franges qu'on observe alors à travers la lunette est photographié (fig. 14). L'enregistrement densitométrique du négatif de cette photographie apparaît sur la figure 15. On peut voir que le repère A se trouve, cette fois, confondu avec un maximum d'éclairement ce qui vérifie bien que les contrastes sont inversés.

4. *Cas particulier où le nombre d'ondes recueillies est très grand.* — Lorsque p est très grand, l'expression de l'éclairement dans le plan focal se simplifie. En rendant p infini dans (9) et (10) on obtient respectivement

$$(11) \quad s = - (1 - \rho^2) \frac{e^{-i\varphi}}{1 - \rho e^{-i\varphi}},$$

$$(12) \quad |s|^2 = \frac{(1 - \rho^2)^2}{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2} = (1 + \rho)^2 \left/ \left[1 + \frac{4\rho}{(1 - \rho)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] \right.$$

On voit que, dans ce cas, la variation de l'éclairement en fonction du déphasage φ est, au facteur $(1 + \rho)^2$ près, la même que pour les interférences à ondes multiples produites par la traversée d'une lame [12]. Il suffit de remplacer le facteur de réflexion ρ par le facteur de réflexion des faces de la lame pour retrouver l'expression classique.

Connaissant ρ et φ , on peut très facilement déterminer graphiquement s défini par l'équation (11) en s'inspirant d'une méthode géométrique proposée par Dufour [13] (fig. 16). A partir de l'origine O du plan complexe, on porte $\vec{OC} = 1$ sur l'axe réel et on trace la circonférence de centre C et de rayon ρ .

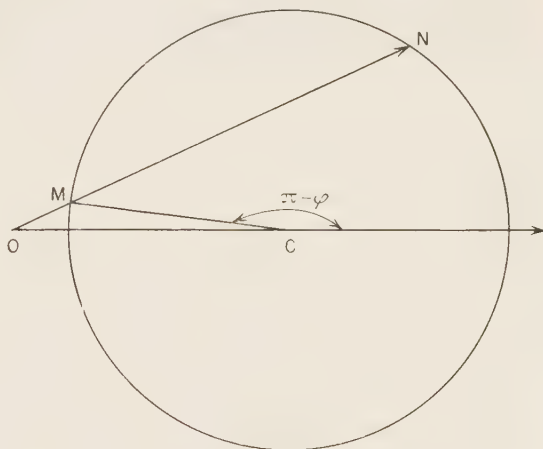


FIG. 16. — Construction de la vibration dans le plan focal lorsqu'on ne recueille pas l'onde Ω'_0 .

A partir de l'origine O du plan complexe, on porte $\vec{OC} = 1$ sur l'axe réel et on trace la circonférence de centre C et de rayon ρ .

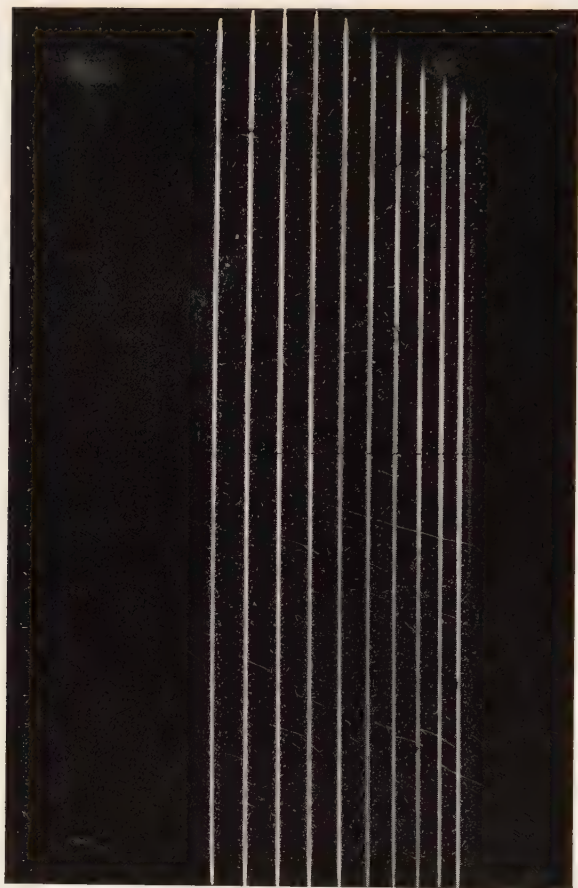


FIG. 17. — Photographie des franges lorsqu'on élimine Ω'_0 et que le facteur de réflexion est élevé.

répartition d'éclairement exprimée par l'équation (12) donne immédiatement, lorsque ρ est voisin de 1, $F = \pi \sqrt{\rho}/(1 - \rho)$. On voit que, lorsque ρ tend vers 1, F peut prendre des valeurs très grandes, comparables à celles obtenues avec un interféromètre de Fabry-Perot. La figure 17 est une photographie des franges obtenues dans ces conditions. La figure 18 est son enregistrement densitométrique. Les franges les plus fines se trouvent sur la partie gauche de la figure ; elles correspondent aux incidences les plus grandes, c'est-à-dire aux valeurs de ρ les plus voisines de 1.

4. **On déphase de π l'onde réfléchie d'ordre 0.** — Si l'on déphase de π l'onde Ω'_0 par rapport aux autres ondes Ω' , l'onde résultante s'écrit

ou

$$s = \rho + (1 - \rho^2) e^{-i\varphi} + (1 - \rho^2) \rho e^{-i2\varphi} + \dots + (1 - \rho^2) \rho^{p-1} e^{-ip\varphi}$$

$$s = \rho + (1 - \rho^2) e^{-i\varphi} \frac{1 - \rho^p e^{-ip\varphi}}{1 - \rho e^{-i\varphi}}.$$

On porte sur cette circonférence le point M tel que $\overline{CM}$ fasse avec l'axe réel l'angle $\pi - \varphi$. M est l'image du nombre $1 - \rho e^{i\varphi}$. OM coupe la circonférence en un second point N . N peut être considéré comme l'inverse de M dans l'inversion qui a pour pôle O et pour puissance la puissance $1 - \rho^2$ de O par rapport au cercle. N est donc l'image de $(1 - \rho^2)/(1 - \rho e^{-i\varphi})$ et, par conséquent, celle de s à une rotation près.

L'intensité maximale, obtenue pour $\varphi = 2k\pi$, vaut $(1 + \rho)^2$ et l'intensité minimale, obtenue pour $\varphi = (2k + 1)\pi$, vaut $(1 - \rho)^2$.

La variation de l'éclairement en fonction de φ pour p infini et $\rho = 3/4$ est représentée sur la figure 13.

Nous pouvons définir la finesse F d'une frange par le rapport de l'interfrange à la largeur de la frange à mi-hauteur [11]. L'application de cette définition à la

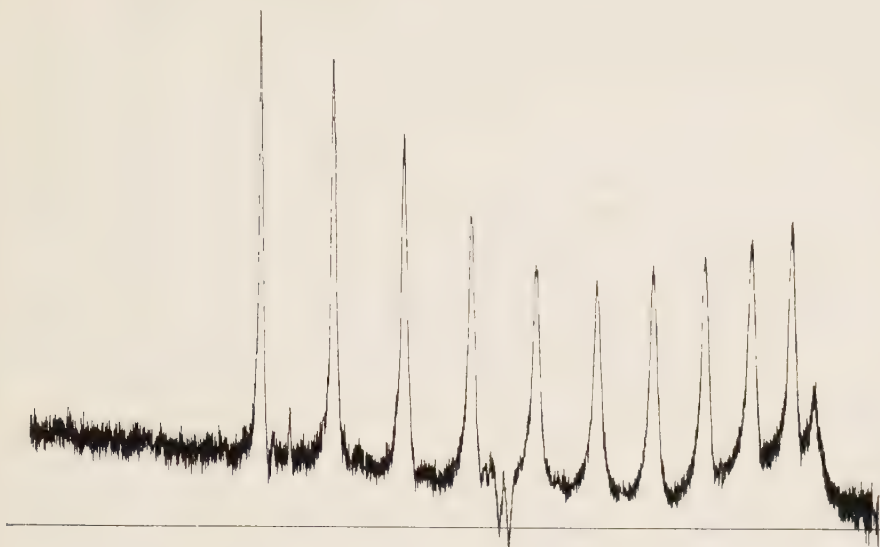


FIG. 18. — Densités optiques de la photographie de la figure 17.

La figure 19 représente s , obtenu par la règle de Fresnel, pour $\rho = 3/4$ et pour les valeurs de φ déjà choisies. La figure 20 montre la variation de l'éclairement en fonction de p et la figure 21 la variation de l'éclairement en fonction de la phase φ . On voit que la répartition de l'éclairement est voisine de celle qu'on obtient en éliminant Ω'_0 .

Si p est très grand, on peut écrire

$$s = \rho + (1 - \rho^2) \frac{e^{-i\varphi}}{1 - \rho e^{-i\varphi}} = \frac{\rho - (2\rho^2 - 1)e^{-i\varphi}}{1 - \rho e^{-i\varphi}}$$

et

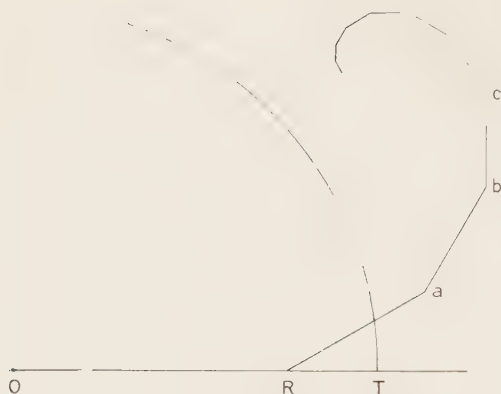
$$|s|^2 = \frac{\rho^2 + (2\rho^2 - 1)^2 - 2(2\rho^2 - 1)\cos\varphi}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\varphi}$$

ou

$$|s|^2 = (2\rho + 1)^2 \left[1 + \frac{4(2\rho^2 - 1)}{(\rho + 1 - 2\rho^2)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] / \left[1 + \frac{4\rho}{(1 - \rho)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right].$$

La vérification expérimentale de ces résultats peut être réalisée en remplaçant, dans le dispositif représenté sur la figure 2, l'écran E_2 par une lame demi-onde⁽²⁾. Pratiquement on dépose, par évaporation sous vide sur la partie de la face de sortie du prisme traversée par l'onde Ω'_0 , une couche transparente dont l'épaisseur h et l'indice μ satisfont à la relation $h(\mu - 1) = \lambda/2$. On voit sur la figure 22 l'aspect que présente, dans ce cas, le plan focal de l'objectif.

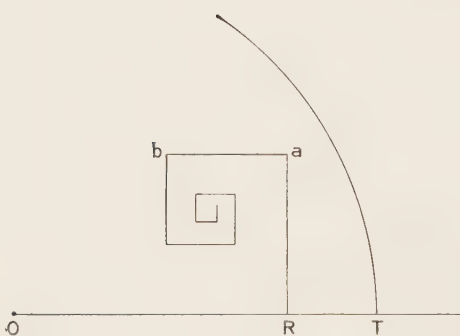
(2) La lame demi-onde a été réalisée par la S. E. A. V. O. M.



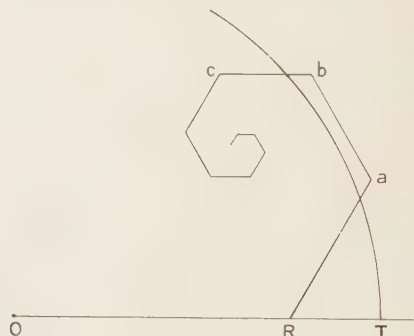
(a)

FIG. 19. — Construction de la vibration dans le plan focal lorsqu'on déphase de π l'onde Ω'_0 :

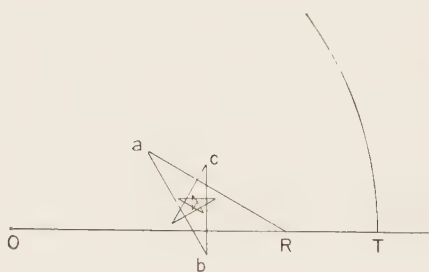
- a) $\varphi = \pi/6$, b) $\varphi = \pi/2$, c) $\varphi = \pi/3$,
d) $\varphi = 5\pi/6$, e) $\varphi = 2\pi/3$.



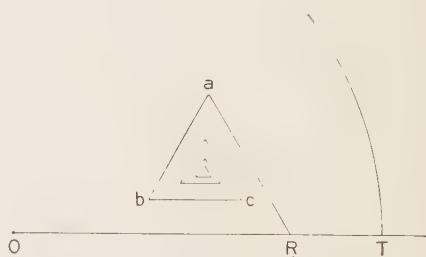
(b)



(c)



(d)



(e)

5. Influence de la diffraction. — Nous avons été amené, pour agir sélectivement sur les ondes réfléchies Ω' , à considérer une onde incidente Ω limitée latéralement. Nous allons voir comment intervient la diffraction sur la répartition des éclaircissements dans le plan focal de l'objectif.

Considérons donc (fig. 1) une onde plane Ω d'incidence γ limitée par une fente perpendiculaire au plan d'incidence et dont la trace JJ' sur la surface du milieu

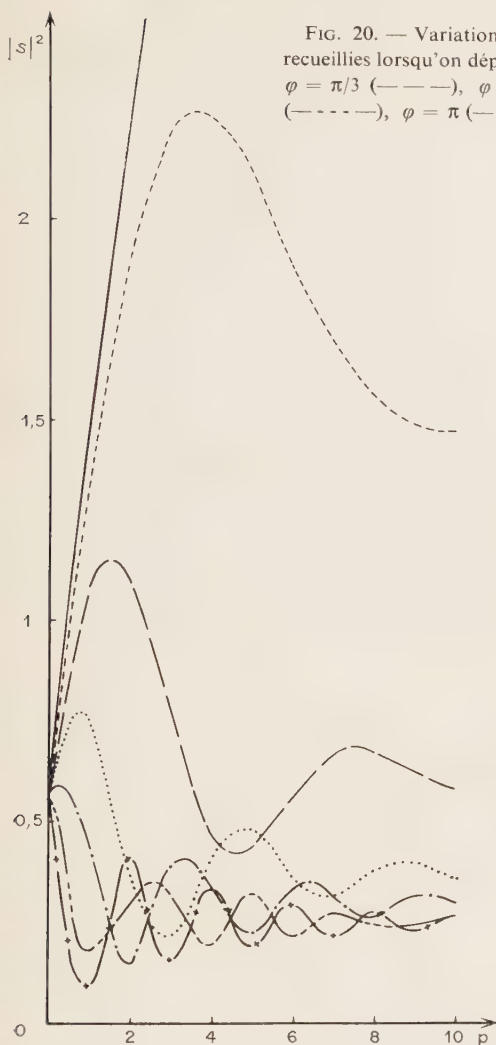


FIG. 20. — Variation de l'éclairement en fonction du nombre d'ondes recueillies lorsqu'on déphase Ω_0 de π : $\varphi = 0$ (—), $\varphi = \pi/6$ (---), $\varphi = \pi/3$ (- · - · -), $\varphi = \pi/2$ (····), $\varphi = 2\pi/3$ (— · — · —), $\varphi = 5\pi/6$ (— · · · —), $\varphi = \pi$ (— + —).

stratifié a pour largeur l . La variation Δv_D de l'incidence correspondant à la largeur de la tache centrale de diffraction vaut

$$(13) \quad \Delta v_D = 2\lambda/l.$$

Pour voir combien de franges sont contenues dans la tache centrale de diffraction, évaluons la variation Δv_i de l'incidence correspondant à une variation de phase de 2π par rapport à Ω_0' . D'après (5), Δv_i est telle que

$$\frac{d\left(\int_0^a [n^2(z) - v^2]^{1/2} dz\right)}{dv} \Delta v_i = \frac{\lambda}{2},$$

avec $n(a) = v$.

Si on suppose que $n(z)$ est une fonction toujours décroissante et dérivable on trouve que

$$\frac{d\left(\int_0^a [n^2(z) - v^2]^{1/2} dz\right)}{dv} = v \int_0^a \frac{dz}{(n^2 - v^2)^{1/2}}.$$

Par conséquent, d'après (3),

$$(14) \quad \Delta v_i = \lambda/\xi.$$

Or, pour agir sélectivement sur les ondes réfléchies, il est nécessaire qu'elles soient séparées dans l'espace, c'est-à-dire que $l < \xi$. Ceci signifie, d'après (13) et (14), que $\Delta v_i < \Delta v_D/2$. On voit donc que la tache de diffraction a une largeur au moins deux fois plus grande que l'interfrange. La répartition de l'éclairement due aux interférences à ondes multiples se trouve modulée par la loi de répartition de l'énergie due à la diffraction à l'infini par le diaphragme en forme de fente.

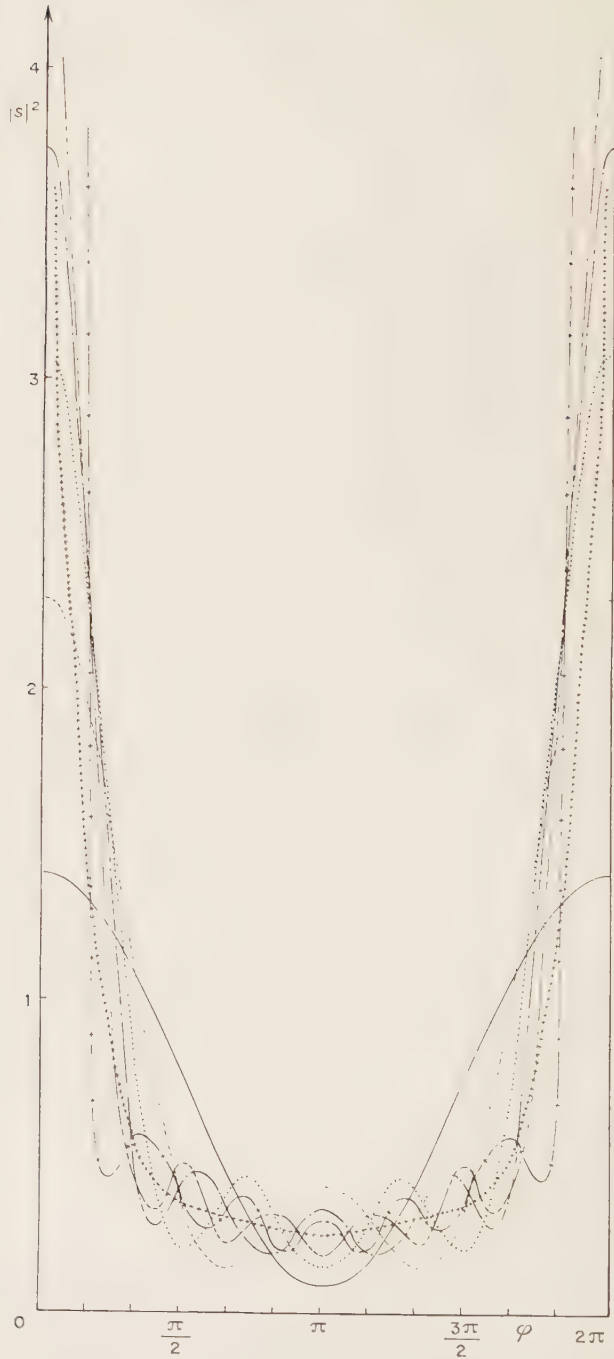


FIG. 21. — Variation de l'éclairement en fonction du déphasage φ lorsque Ω'_0 est déphasée de π : $p = 1$ (—), $p = 2$ (---), $p = 3$ (.....), $p = 4$ (- · - · -), $p = 5$ (- - - - -), $p = 6$ (- + - + -), $p = \infty$ (+ + + + +).

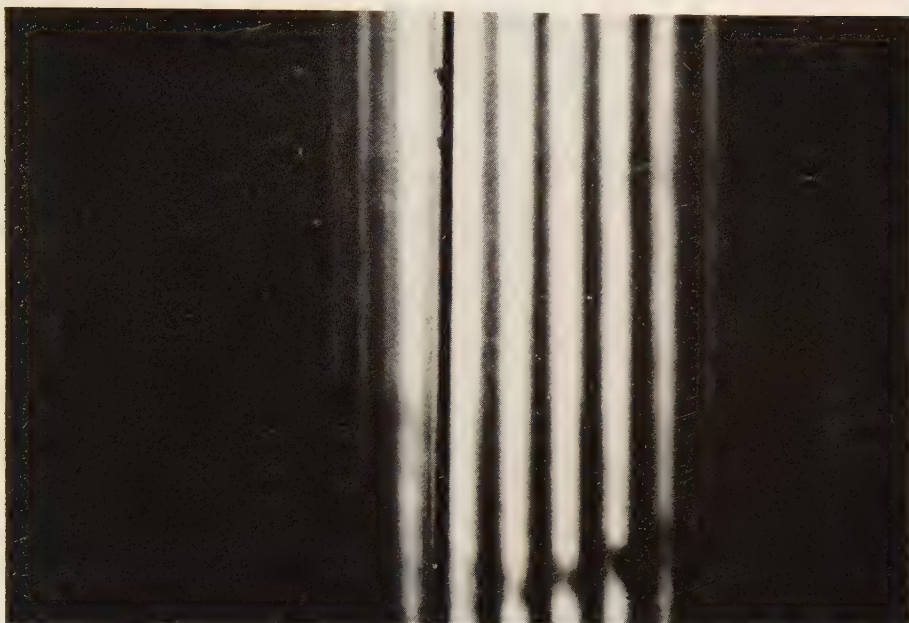


FIG. 22. — Photographie des franges lorsque Ω'_0 est déphasée de π .

Lorsque le milieu stratifié est éclairé en lumière convergente, les éclaircissements relatifs à chaque onde incidente s'ajoutent dans le plan focal.

6. Cas des milieux à stratifications non planes. — Nous allons rechercher où sont localisées les franges lorsque le milieu M est limité par une surface non plane Σ et que son indice au voisinage de cette surface est uniquement une fonction de la distance à la surface. Nous ne considérerons que le cas où le rayon de courbure de la section σ de Σ par le plan d'incidence est grand par rapport au chemin parcouru par la lumière dans le milieu stratifié. Nous pouvons, dans ces conditions, confondre σ avec son cercle osculateur Γ de centre C (fig. 23) au point d'incidence I . Soit RI le rayon incident et $IR_0, I_1R_1, I_2R_2, I_3R_3, \dots$ les divers rayons réfléchis issus de RI , lesquels font le même angle avec Γ que RI . Traçons la circonférence γ de diamètre CI ; soit T l'intersection de IR_0 avec γ . On voit que les rayons réfléchis se croisent au voisinage du point T qui devient le point de convergence des rayons réfléchis lorsque Π_1 tend vers 0. A chaque rayon incident en I correspond un point de convergence. La surface décrite par le point T est la zone de localisation des franges.

La convergence est d'autant moins réalisée et, par conséquent, le contraste des franges est d'autant moins bon, que les points $I, I_1, I_2, \dots$ sont plus éloignés les uns des autres. D'autre part, comme généralement la zone de localisation des franges varie avec le point d'incidence, le contraste diminue lorsque la section du pinceau incident augmente.

On voit aisément que lorsque Σ est une surface réglée, on obtient un bon contraste



FIG. 23. — Localisation des franges lorsque les stratifications ne sont pas planes.

avec des franges localisées à l'infini si le faisceau incident est un pinceau plat dont le plan est normal à la surface et contient une génératrice.

IV. Le stratoréfractomètre

1. **Choix des conditions d'interférence.** — Les résultats de la troisième partie nous montrent qu'il est possible de plusieurs manières de produire un système de franges à l'infini à l'aide des ondes réfléchies sur les strates et que l'on peut ainsi

savoir comment varie le retard de ces ondes par rapport à l'onde réfléchie sur la surface du milieu stratifié lorsque l'incidence varie. Nous allons comparer ces différentes manières pour ne retenir que celle qui présente les plus grands avantages pratiques.

Lorsqu'on recueille toutes les ondes réfléchies, on est conduit, pour faire apparaître un contraste, à utiliser une onde de référence selon le schéma de la figure 4. Ce type d'interféromètre, comme tous ceux où les faisceaux sont séparés est de réalisation et d'emploi délicats.

Lorsqu'on élimine à l'aide d'un écran les ondes d'ordre élevé, il est nécessaire d'utiliser un incident étroit : d'autre part, les franges n'ont pas une grande finesse ; enfin, on doit faire varier la position de l'écran si on veut obtenir pour chaque incidence le contraste maximal.

Si l'on déphase de π l'onde Ω'_0 réfléchie à l'interface, il faut utiliser un pinceau étroit et faire en sorte, pour conserver le contraste, qu'aucune onde autre que Ω'_0 ne subisse ce déphasage, ce qui nécessite quelques précautions.

Au contraire, en éliminant l'onde Ω'_0 réfléchie à l'interface, il n'est plus nécessaire d'utiliser un pinceau étroit, ni un écran mobile ; en effet les ondes réfléchies sur les strates, émanant d'une même onde incidente, font partie de la même série et l'élimination des premiers termes de cette série ne fait que diminuer l'éclairement sans affaiblir le contraste. Ce sont donc ces conditions d'interférence que nous avons adoptées pour réaliser un dispositif pratique.

Lorsqu'il est possible d'éclairer les couches superficielles du milieu M à partir de l'une de ses extrémités, l'onde Ω'_0 se trouve éliminée et, dans le milieu M', matérialisé sur la figure 24 par un prisme, on recueille les ondes qui se sont réfléchies sur les strates. [Dufour [14] décrit une situation analogue lorsqu'il fait pénétrer la

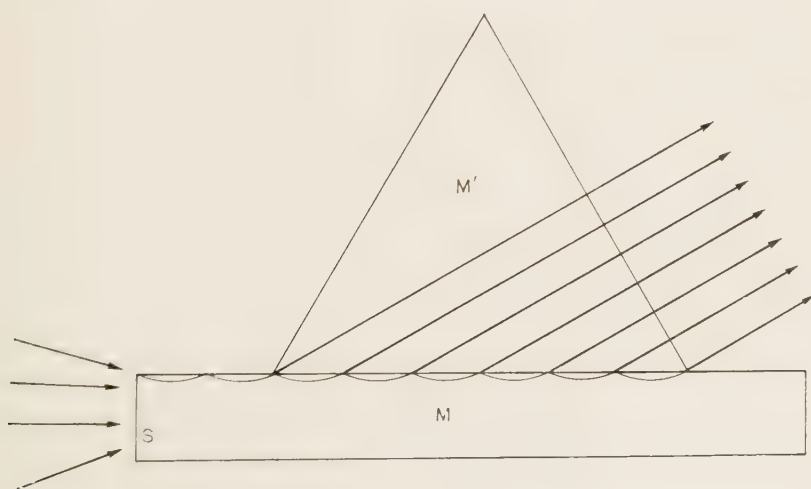


FIG. 24. — Eclairage permettant d'éviter la présence de l'onde Ω'_0 réfléchie sur la surface.

lumière dans un interféromètre de Fabry-Perot par une fenêtre claire (fig. 25)]. Pour déterminer la fonction $\varphi(v)$ on a alors avantage à utiliser un réfractomètre d'Abbe surtout s'il donne directement les valeurs des indices de réfraction. Il y a toutefois une condition importante à respecter pour être certain de recueillir les rayons les plus rasants, c'est-à-dire les ondes dont les incidences sont voisines de n_0 . Cette condition est la même que pour la réfractométrie par la méthode d'Abbe : le cosinus de l'angle que font la face d'entrée S et la face au contact du prisme, doit être inférieur à $1/n_0$ et l'intersection de ces deux faces doit former une arête vive.

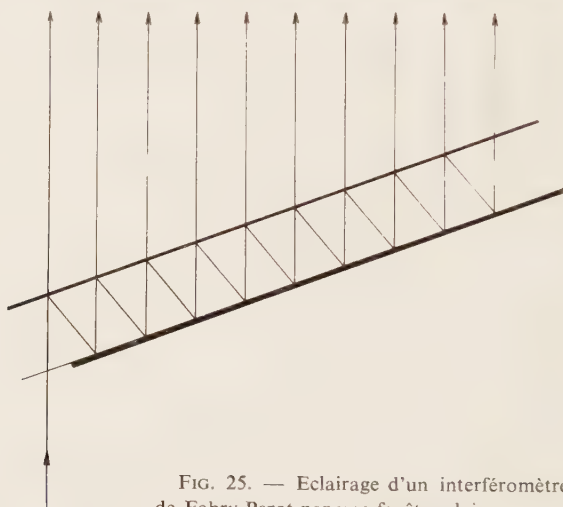


FIG. 25. — Eclairage d'un interféromètre de Fabry-Perot par une fenêtre claire.

Il n'est pas toujours facile, ni même possible de réaliser cette condition ; c'est pourquoi il est préférable de remplacer le prisme ordinaire de la figure 24 par un prisme en verre ABC (fig. 26) qui fut déjà utilisé pour recueillir les ondes superfi-

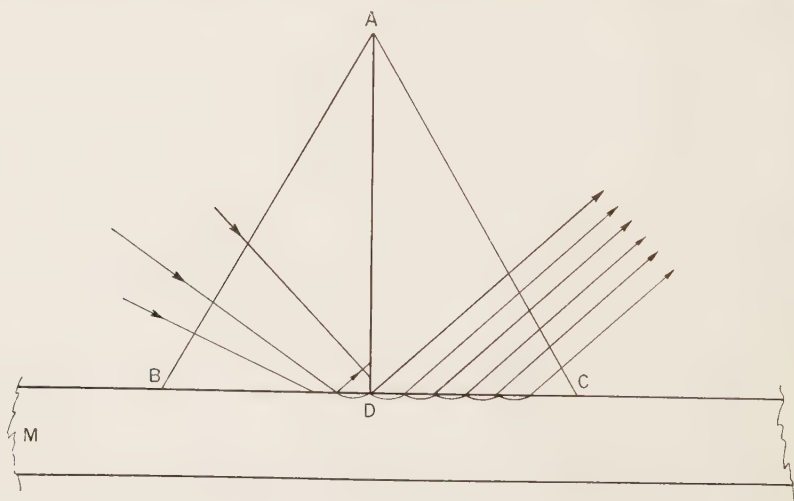


FIG. 26. — Emploi d'un prisme avec écran pour éliminer Ω'_0 .

cielles dans les milieux homogènes ou hétérogènes [15 à 17]. Ce prisme constitue le milieu M' , la face BC étant au contact du milieu M . Il est formé de deux parties ABD et ACD ; les faces AD sont collées l'une à l'autre et l'une d'elles est revêtue d'une couche de transmission nulle. Les rayons incidents arrivent par la face AB . Les rayons réfléchis sur la face BD sont arrêtés par l'écran AD . Les rayons réfléchis sur les strates du milieu M ressortent de M soit à droite soit à gauche de D ; seuls les rayons émergeant à droite sont recueillis.

2. Description du stratoréfractomètre. — La figure 27 représente le schéma optique d'un appareil qui est adapté à l'observation des interférences et la détermination de la fonction $\varphi(v)$ dans le cas de feuilles de verre planes ayant subi des traitements superficiels.

Cet appareil, que nous avons appelé stratoréfractomètre, comprend les éléments suivants :

- a) une source de lumière S qui peut être une lampe à vapeur de mercure ;
- b) un condenseur C ;
- c) un filtre monochromatique F ;
- d) une fente de largeur réglable, non représentée, située dans le plan de la figure ;
- e) un polariseur N ;
- f) le prisme avec écran P sur lequel on pose, par l'intermédiaire d'un liquide, l'échantillon E à analyser ;
- g) une lunette coudée L de grossissement 10 environ, dont l'axe optique est perpendiculaire aux arêtes du prisme et qui recueille les ondes superficielles. Elle est constituée d'un objectif O_1 de bonne qualité, d'un miroir plan M pouvant tourner autour d'un axe parallèle aux arêtes du prisme et d'un oculaire O_2 à vis micrométrique.

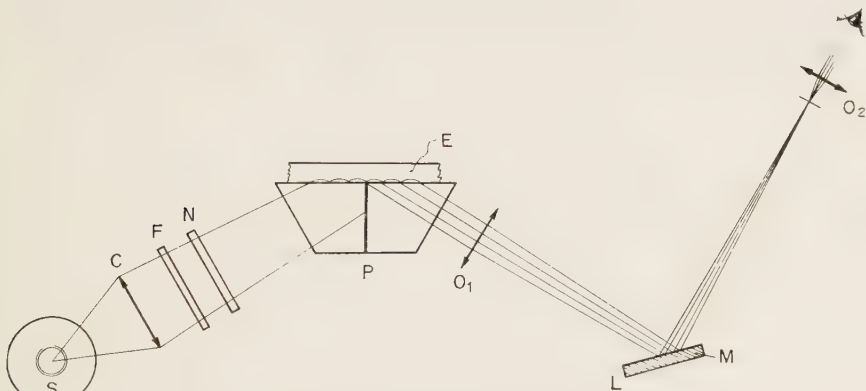


FIG. 27. — Schéma optique du stratoréfractomètre.

Le rôle du polariseur N est de polariser la lumière soit parallèlement, soit perpendiculairement au plan d'incidence. Comme on le sait, les couches superficielles de verres soumis à certains échanges ioniques sont le siège de contraintes planes

dont l'intensité varie avec la distance à la surface [18 à 21]. Il en résulte que chacune de ces couches est biréfringente et est caractérisée optiquement par deux indices $n_{\parallel}$ et $n_{\perp}$ correspondant respectivement à des vibrations lumineuses parallèles et perpendiculaires à son plan. On détermine donc expérimentalement deux fonctions $\phi(v)$ et $\phi(v_{\perp})$ à partir desquelles on calcule, comme nous le verrons dans la cinquième partie, les variations dans l'épaisseur de $n_{\parallel}$ et de $n_{\perp}$, ce qui permet, lorsque les constantes photoélastiques sont connues, de déterminer les variations dans l'épaisseur des contraintes.

La figure 28 est une photographie du stratoréfractomètre.

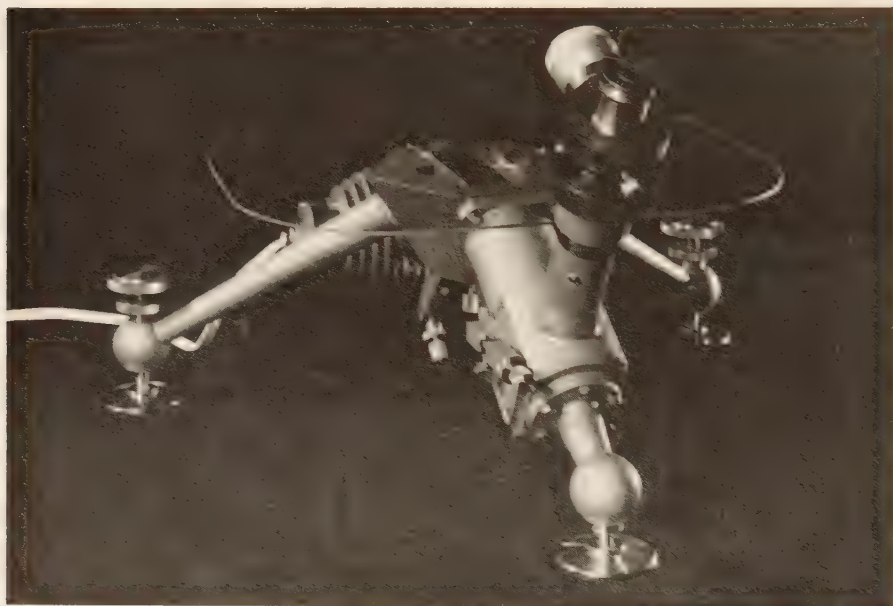


Fig. 28. — Photographie du stratoréfractomètre.

3. Mode d'emploi du stratoréfractomètre. — 1. *Correspondance entre les incidences des rayons et les positions des raies dans le plan focal.* — L'appareil doit permettre la détermination de la fonction

$$\phi(v) = \frac{+\pi}{2} \int_0^{v^2} [n^2(u) - v^2]^{\frac{1}{2}} du,$$

avec $n(z) = v$ ou, en appelant m l'ordre d'interférence,

$$(15) \quad m(v) = \frac{\phi(v)}{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{v^2} [n^2(u) - v^2]^{\frac{1}{2}} du.$$

Pour connaître $m(v)$ à partir de l'interférogramme observé dans le plan focal, il faut établir la relation entre la direction du rayon lumineux dans l'air et l'incidence v dans le milieu stratifié.

Appelons respectivement N et θ l'indice et l'angle du prisme (fig. 29). Soit i l'angle que fait le rayon dans le prisme avec la normale à la face de ce prisme au contact du milieu stratifié et α l'angle que fait dans l'air le rayon avec la normale à la face de sortie ; les relations de Descartes pour ces deux dioptries s'écrivent

$$(16) \quad v = N \sin i$$

et

$$(17) \quad N \sin (i - \theta) = \sin \alpha .$$

L'élimination de i entre (16) et (17) nous fournit la relation entre v et α

$$(18) \quad v = \sin \alpha \cos \theta + \sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} \sin \theta .$$

Dans la pratique, le domaine de variation de v est très restreint ; les modifications superficielles de l'indice n'atteignent pas 2×10^{-2} . On peut donc se limiter à des mesures différentielles. En dérivant l'expression (18) de v en fonction de α on obtient

$$(19) \quad \Delta v = \left(\cos \theta - \frac{\sin \alpha \sin \theta}{\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \Delta \alpha .$$

Nous avons choisi pour θ la valeur $\pi/3$ et pour le verre du prisme le flint extra-dense D 3128 de SOVIREL, d'indice 1,731. Comme les verres industriels pour lesquels cet appareil est conçu particulièrement ont des indices de l'ordre de 1,516, l'angle i est très voisin de $\pi/3$ et, par conséquent, l'angle α est voisin de 0 (en réalité il n'atteint pas 2°). Dans ces conditions, le second terme de l'expression entre parenthèses de l'équation (19) est inférieur à 1/300 du premier terme et l'équation (19) prend une forme très simple :

$$\Delta v = \frac{1}{2} \Delta \alpha .$$

La longueur focale de l'objectif de la lunette vaut 250 mm. Une division du tambour de la vis micrométrique de l'oculaire correspond à un déplacement du réticule de 0,01 mm, donc à une variation pour α de $0,01/250 = 4 \times 10^{-5}$ et à une variation pour v de 2×10^{-5} .

Le pointé des diverses franges lorsqu'on utilise une lumière monochromatique permet de tracer une courbe représentant les variations de m en fonction de v si l'on se fixe v pour l'une des franges (fig. 30). On commet une erreur très faible si l'on prend pour valeur de l'incidence relative à la raie d'ordre le plus élevé l'indice des couches internes du verre qui, s'il s'agit de verre étiré industriel, diffère peu de 1,516. D'ailleurs, pour les applications de cette méthode, nous verrons que c'est le gradient qu'il est important de connaître avec précision et non les valeurs absolues des indices.

2. Cas où il y a incertitude sur les ordres d'interférence ; utilisation de plusieurs radiations. — Il arrive qu'il y ait une incertitude sur les ordres d'interférence, soit

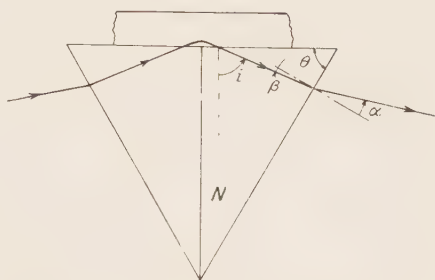


FIG. 29. — Etablissement de la relation entre les variations d'incidence dans le milieu stratifié et les variations de direction dans l'air.

parce que l'indice ne prend pas sa valeur maximale à la surface du milieu stratifié, soit parce que l'indice ne décroît que très lentement. Dans le premier cas, l'ordre de la première frange visible peut être élevé, les trajectoires des rayons lumineux dans le milieu stratifié présentant un point d'inflexion. Dans le second cas, lorsque, par exemple $-(dn/dz)_{z=0} < 0,1 \text{ cm}^{-1}$, les premiers ordres correspondent à des incidences très peu inférieures à l'indice n_0 à la surface et pour lesquelles le facteur de réflexion est très voisin de 1. L'énergie lumineuse est alors presque entièrement contenue dans l'onde Ω'_0 et ces ordres risquent d'être inaperçus par manque de lumière.

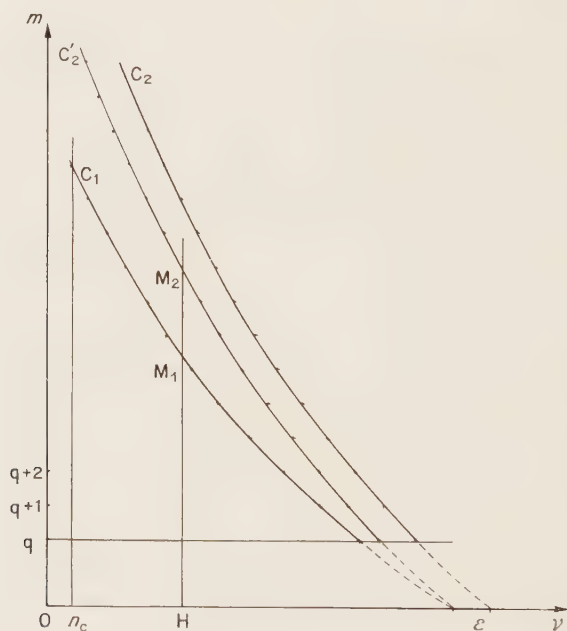


FIG. 30. — Variation de l'ordre d'interférence en fonction de l'incidence : $HM_1/HM_2 = \lambda_2/\lambda_1$.

Dans les deux cas $m(\nu)$ n'est connu qu'à un entier q près.

Nous allons décrire un procédé qui permet de déterminer q lorsque les variations d'indice sont faibles. Reprenons d'abord l'équation (15). Elle peut s'écrire

$$m(\nu) = \frac{2}{\lambda} \int_0^z [n(u) + \nu]^{1/2} [n(u) - \nu]^{1/2} du$$

ou

$$m(\nu) = \frac{2\sqrt{2\nu}}{\lambda} \int_0^z \left(1 + \frac{n - \nu}{2\nu}\right)^{1/2} [n(u) - \nu]^{1/2} du.$$

L'égalité

$$(20) \quad m(\nu) = \frac{2\sqrt{2\nu}}{\lambda} \int_0^z [n(u) - \nu]^{1/2} du$$

[avec toujours $n(z) = v$] est vérifiée à 1 % près si la valeur maximale que peut prendre $(n - v)/2v$ est 0,02. Pratiquement, nous voyons que, tant que les variations d'indice n'excèdent pas 0,06, l'équation (20) est valable.

Eclairons le milieu stratifié à l'aide de deux radiations monochromatiques de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 . Nous admettrons que, dans la limite de la précision des mesures, la dispersion chromatique dans le domaine (λ_1, λ_2) reste constante le long du trajet des rayons lumineux. Autrement dit nous supposons que, si n_1 et n_2 sont les indices d'une couche respectivement pour les radiations λ_1 et λ_2 , l'écart $\varepsilon = n_2 - n_1$ est indépendant de la couche considérée; les deux répartitions d'indice se déduisent alors l'une de l'autre par une translation égale à ε .

Les rayons transportant la radiation λ_1 sous l'incidence v_1 et les rayons transportant la radiation λ_2 sous l'incidence $v_2 = v_1 + \varepsilon$ ont la même trajectoire. On en déduit que

$$\int_0^z (n_1 - v_1)^{1/2} du = \int_0^z (n_2 - v_2)^{1/2} du ,$$

d'où, d'après (20),

$$\frac{m(v_1) \lambda_1}{\sqrt{2} v_1} = \frac{m(v_2) \lambda_2}{\sqrt{2} v_2} .$$

Si λ_1 et λ_2 sont assez proches pour que $\varepsilon < 0,03$, on a, avec toujours une incertitude de 1 %,

$$(21) \quad m(v_1) \lambda_1 = m(v_2) \lambda_2 ,$$

c'est-à-dire que les différences de marche relatives respectivement à la radiation λ_1 sous l'incidence v_1 et à la radiation λ_2 sous l'incidence v_2 sont égales.

Soit C_1 et C_2 les courbes expérimentales $m(v_1)$ et $m(v_2)$ [fig. 30]. Les ordonnées de ces courbes ne sont connues qu'à la constante q près. Soit C'_2 la courbe déduite de C_2 par la translation $\varepsilon = v_2 - v_1$ suivant l'axe de v ⁽³⁾; les ordonnées HM_1 et HM_2 des courbes C_1 et C'_2 sont liées d'après (21) par la relation $HM_2/HM_1 = \lambda_1/\lambda_2$, soit $M_1M_2/HM_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_2$.

Il est donc facile de déterminer graphiquement HM_1 et, par conséquent, de connaître q .

3. Facteurs influençant la qualité de l'interférogramme. — Comme dans la plupart des techniques interférométriques, les informations concernant un échantillon donné fournies par le relevé des positions des franges sont d'autant plus complètes que les franges sont plus nombreuses et que leur finesse est plus grande.

⁽³⁾ Dans le cas d'un verre ayant subi un échange ionique, l'écart ε est déterminé en mesurant les indices relatifs aux radiations λ_1 et λ_2 pour le même verre non traité. Cette détermination peut se faire avec le stratoréfractomètre. L'appareil avait été conçu à l'origine pour la mise en œuvre d'une nouvelle méthode de réfractométrie [22] qui consiste à repérer la direction de propagation de l'onde résurgente plane émanant des ondes superficielles qui se propagent dans les milieux homogènes. L'onde résurgente a en effet une incidence égale à l'incidence limite de réflexion totale [23]. Si l'on éclaire à l'aide des radiations λ_1 et λ_2 le verre non traité reposant sur le prisme de référence, on observe dans le plan focal de l'objectif deux raies dont l'écart représente la translation à faire subir à la courbe C_2 (fig. 30).

Le nombre de franges, si l'on néglige la dispersion, est inversement proportionnel à la longueur d'onde. Avec la radiation du mercure de longueur d'onde $4\,358\text{ \AA}$ il y a 35 % de franges de plus qu'avec la radiation du sodium de longueur d'onde $5\,889\text{ \AA}$.

Quant à la finesse des franges, elle dépend de plusieurs facteurs : le nombre d'ondes recueillies pour chaque incidence, le facteur de réflexion, la largeur spectrale de la source de lumière et enfin le choix du liquide de contact.

Nous allons passer ces facteurs successivement en revue.

A) LE NOMBRE D'ONDES RECUEILLIES POUR CHAQUE INCIDENCE. — Pour recueillir un nombre d'ondes élevé pour chaque incidence, la longueur de la face de contact entre le prisme et l'échantillon suivant le plan d'incidence doit être grande par rapport à la longueur des arcs décrits par les rayons dans l'échantillon. La longueur de la face BD du prisme par où émergent les ondes réfléchies est de 5 cm. Le décalage ξ entre deux ondes consécutives ne peut donc guère excéder 1 cm ; d'après (14) cela signifie que la différence entre les incidences relatives à deux franges voisines ne peut être inférieure à $\Delta v = \lambda \xi \simeq 5 \times 10^{-5}$.

L'écart angulaire correspondant dans l'air est de 10^{-4} rd, soit 20" environ. Une lunette de grossissement 10 est donc suffisante.

B) LE FACTEUR DE RÉFLEXION. — On a vu (§ III.3.4) que les franges sont d'autant plus fines que le facteur de réflexion ρ est plus voisin de 1. Les formules de Fresnel [11] nous fournissent les expressions de ρ en fonction des angles i et r à l'interface, r représentant l'angle d'incidence du côté du milieu stratifié. On a, pour la vibration dans le plan d'incidence,

$$\rho = \operatorname{tg}(r - i) \operatorname{tg}(r + i)$$

et, pour la vibration normale au plan d'incidence,

$$\rho_{\perp} = -\sin(r - i) \sin(r + i);$$

cherchons, pour un échantillon donné, quelle est l'influence de l'indice N du prisme de référence sur $|\rho|$ et $|\rho_{\perp}|$:

$$\frac{d\rho}{dN} = \frac{d\rho}{di} \frac{di}{dN};$$

$d\rho/di$ a le signe de $\sin 2r \cos 2i$. Puisque i est plus grand que $\pi/4$, quand r est voisin de $\pi/2$, $d\rho/di < 0$. D'autre part, quel que soit N , $di/dN < 0$. Donc $d\rho/dN > 0$ pour r voisin de $\pi/2$.

De même,

$$\frac{d\rho_{\perp}}{dN} = \frac{d\rho_{\perp}}{di} \frac{di}{dN};$$

$d\rho_{\perp}/di$ a le signe de $-\sin 2r$ et est donc toujours négatif. $d\rho_{\perp}/dN$ est, par conséquent, toujours négatif.

On doit donc tailler le prisme de l'appareil dans un verre d'indice élevé.

D'autre part,

$$\frac{\rho}{\rho_{\perp}} = \frac{\cos(r + i)}{\cos(r - i)} < 1.$$

On a donc intérêt à polariser la lumière pour ne retenir que la vibration normale au plan d'incidence.

C) LA LARGEUR SPECTRALE DE LA SOURCE DE LUMIÈRE. — Nous allons déterminer l'élargissement des franges dû au fait que la lumière utilisée n'est pas rigoureusement monochromatique. Supposons, pour cela, que l'on éclaire le milieu stratifié par un rayonnement de longueur d'onde moyenne λ et de largeur spectrale $\Delta\lambda$. La frange relative à l'ordre d'interférence m est formée des rayons dont les incidences v vérifient l'équation

$$\frac{2}{\lambda} \int_0^a [n^2(z) - v^2]^{1/2} dz = m,$$

avec $n(a) = v$, lorsque λ varie dans l'intervalle $\Delta\lambda$.

Reprenons la figure 30 en supposant que les radiations λ_1 et λ_2 considérées dans le paragraphe IV.3.2 représentent les limites du domaine spectral $\Delta\lambda$. α devient alors la variation Δn de l'ensemble des indices du milieu stratifié quand λ varie de $\Delta\lambda$. Le domaine Δv des incidences relatives à l'ordre m est égal à la différence des abscisses des points de C_1 et C_2 qui ont même ordonnée. On trouve aisément que

$$\Delta v = \Delta n + m \frac{\partial v}{\partial m} \frac{\Delta \lambda}{\lambda};$$

$\partial v / \partial m$ est la variation de l'incidence quand on passe d'une frange à la suivante au voisinage de l'ordre m .

Pour connaître le domaine angulaire $\Delta\alpha$ dans l'air qui représente la largeur de la frange d'ordre m , on différentie l'équation (18), sachant que N et α sont des fonctions de λ ,

$$\Delta v = \cos \theta \cos \alpha \Delta\alpha + \sin \theta \frac{N \Delta N - \cos \alpha \sin \alpha \Delta\alpha}{\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

En éliminant Δv entre les deux équations précédentes, on obtient

$$\Delta\alpha \cos \alpha \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \alpha}{\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha}} \right) = m \frac{\partial v}{\partial m} \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \Delta n - \frac{N \sin \theta \Delta N}{\sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Lorsque, comme pour le stratoréfractomètre, $\sin \theta$ est voisin de n/N , c'est-à-dire lorsque α est petit, cette équation se simplifie

$$\Delta\alpha \sqrt{1 - \frac{n^2}{N^2}} = m \frac{\partial \alpha}{\partial m} \sqrt{1 - \frac{n^2}{N^2}} \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \Delta n - n \frac{\Delta N}{N}$$

ou

$$\Delta\alpha = m \frac{\partial \alpha}{\partial m} \frac{\Delta \lambda}{\lambda} - \frac{(\Delta N/N) - (\Delta n/n)}{\sqrt{(1/n^2) - (1/N^2)}},$$

$\partial \alpha / \partial m$ étant l'interfrange mesuré avec la lunette.

On voit que l'élargissement $\Delta\alpha$ de la frange dû à la largeur spectrale $\Delta\lambda$ résulte de la superposition de deux effets :

a) le premier varie avec la différence de marche et se manifeste pour tout phénomène d'interférence.

b) le second résulte du chromatisme du milieu stratifié et du prisme et est indépendant du trajet suivi par la lumière.

Nous allons évaluer l'effet dû au chromatisme. Lorsque le prisme est en flint D 3128 et l'échantillon en verre sodocalcique du commerce, on trouve, pour la raie verte du mercure,

$$\frac{\Delta N}{N \Delta \lambda} = -0,85 \times 10^{-5} \text{ \AA}^{-1}, \quad \frac{\Delta n}{n \Delta \lambda} = -0,33 \times 10^{-5} \text{ \AA}^{-1}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{N^2}} = 0,33$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{\Delta N}{N \Delta \lambda} - \frac{\Delta n}{n \Delta \lambda} \right) / \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{N^2}} = -1,86 \times 10^{-5} \text{ \AA}^{-1}.$$

Si la largeur spectrale de la source utilisée est de 30 Å, l'élargissement angulaire de la frange résultant du chromatisme est de 6×10^{-4} rd, ce qui est considérable.

Cet effet peut être fortement diminué en choisissant, pour le verre du prisme, un verre de faible dispersion comme le baryum crown C 2060 de SOVIREL d'indice 1,620. On obtient alors

$$\frac{\Delta N}{N \Delta \lambda} = -0,365 \times 10^{-5} \text{ \AA}^{-1}$$

et

$$\left(\frac{\Delta N}{N \Delta \lambda} - \frac{\Delta n}{n \Delta \lambda} \right) / \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{N^2}} = -0,16 \times 10^{-5} \text{ \AA}^{-1}.$$

L'ordre d'interférence m de la frange « achromatique » est tel que

$$m \frac{\partial x}{\partial m} = \lambda \left(\frac{\Delta N}{N \Delta \lambda} - \frac{\Delta n}{n \Delta \lambda} \right) / \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{N^2}}.$$

En supposant un interfrange $|\partial x / \partial m|$ de 10^{-3} pour la raie verte du mercure, on trouve $m = 51$ avec le flint D 3128 et $m = 3$ avec le baryum crown C 2060. L'ordre des franges que l'on observe avec le stratoréfractomètre n'excède que rarement 50; on a donc intérêt à choisir pour le prisme un verre de faible dispersion. Comme pour les verres commerciaux, la dispersion croît en général avec l'indice, cette conclusion est difficile à concilier avec celle du paragraphe IV.3.3B où l'on préconise l'utilisation d'un prisme d'indice élevé pour que le facteur de réflexion soit très voisin de 1.

En réalité, le choix dépend des échantillons à examiner: lorsque les variations d'indice n'excèdent pas 10^{-2} , l'utilisation d'un verre de faible dispersion est préférable, même si son indice n'est pas très élevé.

D) LE LIQUIDE DE CONTACT. — Nous nous contenterons de considérations qualitatives pour choisir le liquide. Deux cas pratiques peuvent être distingués.

a) *Cas où la surface de l'échantillon est plane optiquement.* — Lorsque la surface de l'échantillon est plane optiquement la couche de liquide intercalaire peut être réduite par l'expérimentateur à une lame mince à faces parallèles. On sait que [11], toutes choses égales par ailleurs, le facteur de réflexion d'une lame est d'autant plus grand que son indice de réfraction est plus élevé. La finesse des franges varie donc, dans ce cas, dans le même sens que l'indice de réfraction du liquide.

b) *Cas où la surface de l'échantillon n'est pas plane optiquement.* — Supposons que, comme dans le cas des verres plats industriels ayant subi une diffusion ionique, la surface de l'échantillon ne soit pas plane optiquement et que les strates soient parallèles à cette surface. L'expérimentateur ne peut alors ramener la couche de liquide à une lame mince à faces parallèles.

Si l'indice du liquide diffère à la fois de celui du prisme et de l'indice de surface de l'échantillon, le système de franges dû à l'interférence des ondes réfléchies sur les deux surfaces du liquide affaiblit le contraste du système de franges que l'on désire repérer.

Si l'indice du liquide est égal à l'indice de surface de l'échantillon, l'interface où se produit la séparation des ondes est alors la surface du prisme et comme la couche de liquide n'est pas une lame à faces parallèles, le déphasage entre deux ondes consécutives issues d'une même onde incidente ne reste pas constant, ce qui élargit les franges.

Par contre, si l'indice est le même que celui du prisme, on se trouve alors dans les conditions considérées au paragraphe III.6 et l'on n'a alors, comme on l'a vu, qu'à tenir compte essentiellement d'un déplacement de la zone de localisation des franges.

Il apparaît donc que, lorsque la surface de l'échantillon n'est pas plane optiquement, il est préférable d'utiliser un liquide de même indice que celui du prisme.

V. Calcul de la répartition de l'indice à partir de la phase des ondes réfléchies

On vient de voir qu'il est possible de suivre, par la voie expérimentale, les variations de la phase φ avec l'incidence v . En réalité, on peut repérer avec précision la position des franges brillantes dans le plan focal de l'objectif, c'est-à-dire qu'on peut connaître les incidences des ondes pour lesquelles l'ordre d'interférence $m = \varphi/2\pi$ est un nombre entier. On dispose donc d'un nombre de valeurs de la fonction $\varphi(v)$ ou $m(v)$ égal au nombre de franges que l'on peut pointer dans le champ de la lunette. Nous traitons dans cette partie le problème essentiel de la détermination de la fonction $n(z)$ à partir de la connaissance de valeurs discrètes de $m(v)$ sachant que

$$(15) \quad m = \frac{2}{\lambda} \int_0^z [n^2(u) - v^2]^{1/2} du,$$

avec $n(z) = v$.

L'équation (15) ne permet de déterminer la fonction $n(z)$ qu'à condition de pouvoir faire certaines hypothèses sur la nature de $n(z)$.

1. **Cas où la variation de l'indice est toujours décroissante.** — Lorsqu'on suppose que la fonction $n(z)$ est monotone décroissante, on peut définir la fonction inverse $z = f(n)$ et exprimer la dérivée de $m(v)$:

$$(22) \quad m'(v) = \frac{2v}{\lambda} \int_v^{n_0} \frac{f'(n) dn}{(n^2 - v^2)^{1/2}},$$

d'où l'on tire (voir appendice mathématique)

$$(23) \quad z(n) = -\frac{\lambda}{\pi} \int_n^{n_0} \frac{m'(v) dv}{(v^2 - n^2)^{1/2}}.$$

Si le nombre de points expérimentaux définissant la fonction $m(v)$ est suffisant, on peut considérer que $m'(v)$ est connue pour toute valeur de v et la fonction $z(n)$ se calcule alors par intégration numérique. Une application de cette méthode est présentée dans la sixième partie. Toutefois, le gradient d'indice au voisinage immédiat de la surface, soit $(dn/dz)_{z=0}$, ainsi que la valeur de n_0 peuvent être calculés, comme nous allons le voir, sans faire appel à l'intégration numérique.

Posons $(dn/dz)_{z=0} = -n_0/h$. D'après (22), on obtient, pour des valeurs de v voisines de n_0 ,

$$m'(v) = \frac{2v}{\lambda} \int_v^{n_0} \frac{-h dn}{n_0(n^2 - v^2)^{1/2}},$$

soit, en intégrant,

$$m'(v) = \frac{-2vh}{n_0\lambda} \operatorname{Arg ch} \frac{n_0}{v}$$

et, en intégrant une seconde fois :

$$m(v) = \frac{-h n_0}{\lambda} \operatorname{Arg ch} \frac{n_0}{v} + \frac{h}{\lambda} (n_0^2 - v^2)^{1/2}.$$

Supposant que h n'est pas petit devant λ et prenant $n_0 - v$ comme infiniment petit principal, on trouve

$$m = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{n_0} \right)^{1/2} \frac{h}{\lambda} (n_0 - v)^{3/2},$$

d'où

$$(24) \quad n_0 - v = \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n_0}{2} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{h} \right]^{2/3} m^{2/3}.$$

Pour $m = 1, \quad n_0 - v_1 = \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n_0}{2} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{h} \right]^{2/3};$

pour $m = 2, \quad n_0 - v_2 = \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n_0}{2} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{h} \right]^{2/3} 2^{2/3};$

donc $v_1 - v_2 = (2^{2/3} - 1) \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n_0}{2} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{h} \right]^{2/3}.$

On en tire

$$h = \frac{3}{4} \left(\frac{n_0}{2} \right)^{1/2} \left[\frac{2^{2/3} - 1}{v_1 - v_2} \right]^{3/2} \lambda \quad \text{et} \quad n_0 - v_1 = \frac{v_1 - v_2}{2^{2/3} - 1} = \frac{v_1 - v_2}{0,587},$$

ce qui détermine n_0 .

On voit qu'un gradient dn/dz constant se reconnaît à l'invariance du rapport $(v_m - v_{m+1})/[(m+1)^{2/3} - m^{2/3}]$, quelles que soient les deux franges consécutives considérées.

Il est intéressant de rechercher la répartition d'indice pour laquelle $m'(v)$ est une constante γ , c'est-à-dire que l'écart entre les incidences relatives à deux raies brillantes consécutives est constant et a pour valeur $1/\gamma$.

De (23) on tire immédiatement

$$n = \frac{n_0}{\text{ch}(\pi z/\gamma \lambda)}.$$

Tant que n s'écarte peu de n_0 , cette courbe se confond avec la parabole

$$(25) \quad n_0 - n = n_0 \frac{\pi^2 z^2}{2 \gamma^2 \lambda^2}.$$

2. Cas où la variation de l'indice n'est pas toujours décroissante. — Quand on suppose que $n(z)$ n'est pas monotone décroissante, l'équation (15) ne permet pas d'expliciter $n(z)$. On peut alors utiliser une méthode d'approximation qui consiste à essayer pour $n(z)$ certaines fonctions paramétriques et à chercher s'il existe un jeu de valeurs numériques pour les paramètres qui permette à la fonction $m(v)$ qui résulte alors du calcul de (15) de se confondre avec la fonction définie par les valeurs expérimentales. Comme on a, généralement, quelque idée sur le type de fonction qui doit représenter $n(z)$, on n'a qu'un nombre limité d'essais à effectuer. Cette méthode est recommandée si la fonction présumée $n(z)$ permet l'intégration de (15). Nous allons l'appliquer à certains types de répartition d'indice particulièrement simples.

1. Détermination des caractéristiques d'une couche d'indice constant. — Supposons que (fig. 31) l'indice de réfraction prenne une valeur constante n_0 jusqu'à $z = a$, qu'entre a et $a + \Delta a$ il diminue jusqu'à la valeur n_1 et que, pour $z > a + \Delta a$, il conserve la valeur n_1 . Nous admettons que Δa est négligeable devant a mais grand par rapport à λ . On tire alors immédiatement de (15) la relation entre m et v :

$$(26) \quad m = \frac{2a}{\lambda} (n_0^2 - v^2)^{1/2}.$$

Considérons deux franges brillantes successives d'ordre m et $m+1$ correspondant aux incidences v_m et v_{m+1} .

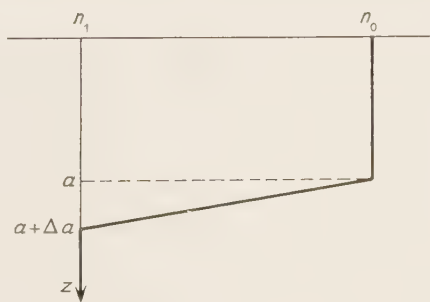


FIG. 31. — Représentation d'une couche d'indice constant.

On tire de (26)

$$(27) \quad \frac{v_m^2 - v_{m+1}^2 + 1}{2m + 1} = \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2.$$

On voit donc, d'après (27), qu'une condition nécessaire pour qu'une répartition d'indice soit celle de la figure 31 est que $(v_m^2 - v_{m+1}^2)/(2m + 1)$ soit indépendant de m .

Si donc les valeurs expérimentales sont telles que $(v_m^2 - v_{m+1}^2)/(2m + 1)$ est constant et que l'hypothèse de la répartition selon la figure 31 est vraisemblable, la valeur de ce rapport donne immédiatement l'épaisseur a de la couche. Quant à la valeur de n_0 , elle se déduit de (26) et (27) :

$$n_0^2 = \frac{(m + 1)^2 v_m^2 - m^2 v_{m+1}^2}{2m + 1}.$$

L'incidence v_k correspondant à la raie dont l'ordre k est le plus élevé constitue une valeur approchée par excès de n_1 et l'on a ⁽⁴⁾

$$v_k^2 - n_1^2 < (2k + 1) \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2.$$

Lorsque n_0 et n_1 sont voisins, l'équation (26) se simplifie et, n représentant une valeur moyenne de l'indice, on trouve

$$(28) \quad m = \frac{2a}{\lambda} (2n)^{1/2} (n_0 - v)^{1/2}.$$

De même, l'équation (27) devient

$$(29) \quad \frac{v_m - v_{m+1}}{2m + 1} = \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \frac{1}{2n}.$$

Les écarts entre les incidences relatives à deux raies brillantes successives varient comme la suite des nombres entiers impairs. Enfin,

$$(30) \quad n_0 - v_1 = (v_1 - v_2)/3.$$

a et n_0 sont déterminés par (29) et (30).

REMARQUES. — a) *Cas où Δa est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.* — Les relations simples qui viennent d'être établies ne sont pas rigoureuses lorsque la variation d'indice est discontinue car il doit alors être tenu compte des avances de phase δ introduites par la réflexion totale sur un dioptré plan et qui sont calculables à partir des formules de Fresnel [11]. Les avances de phase $\delta_{\parallel}$ et $\delta_{\perp}$ relatives respectivement à la vibration parallèle et à la vibration perpendiculaire au plan d'incidence sont telles que

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{\parallel}}{2} \right) = \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^2 \left(\frac{v^2 - n_1^2}{n_0^2 - v^2} \right)^{1/2} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{\perp}}{2} \right) = \left(\frac{v^2 - n_1^2}{n_0^2 - v^2} \right)^{1/2}.$$

(4) D'ailleurs, s'il est possible d'éclairer le milieu M suivant le schéma de la figure 24, on obtient une valeur exacte de n_1 à partir de la position de la frontière de la zone claire qu'on repère habituellement dans la méthode d'Abbe.

Elles varient de 0 à π lorsque v varie de n_1 à n_0 .

Etant donné que, pour que les caractéristiques de la couche puissent être déterminées, il est nécessaire que le nombre de franges soit au moins égal à 2, c'est-à-dire que l'ordre d'interférence soit supérieur à 2, on pourra généralement négliger $\delta_{\parallel}$ et $\delta_{\perp}$ qui ne font varier l'ordre d'interférence que de 1/2 lorsque v varie de n_0 à n_1 .

b) *Cas où Δa est de l'ordre de grandeur de a .* — Pour $z < a$ posons alors $n = n_0 [1 - (z/b)]$. Si on suppose que les variations d'indice sont faibles, on obtient, par intégration de (15),

$$m = 2 \sqrt{2} n \frac{a}{\lambda} (n_0 - v)^{1/2} \left[1 + \frac{2b}{3na} (n_0 - v) \right].$$

Il est facile de déterminer les coefficients a et b à partir des valeurs expérimentales de $m(v)$, n_0 étant calculé au préalable à l'aide de (30).

c) *Les franges de Herschel.* — On sait qu'on obtient les franges de Herschel [24] en réalisant une mince lame d'air à faces parallèles avec les faces hypoténuses de deux prismes rectangles P_1 et P_2 (fig. 32) et en l'éclairant par des rayons dont les incidences sont légèrement inférieures à l'incidence limite de réflexion totale. La position des maximums lorsqu'on observe à l'infini la lumière transmise suit la même loi que dans le cas que nous venons d'étudier mais la finesse des franges est moins grande car, ρ étant le coefficient de réflexion aux interfaces de la lame, les amplitudes des ondes successives forment une progression géométrique de raison ρ^2 et non de raison ρ .

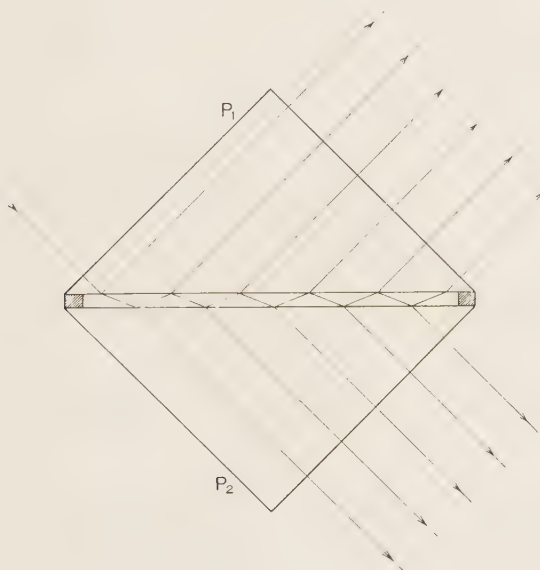


FIG. 32. — Dispositif pour former les franges de Herschel.

2. Etude des répartitions pour lesquelles la valeur maximale ne se trouve pas en surface. — Lorsqu'on ne peut faire l'hypothèse que n_0 est l'indice le plus élevé du milieu stratifié, on ne peut pas admettre en général que m croît continûment à partir de 0 lorsque $n_0 - v$ croît. Il devient alors nécessaire d'utiliser plusieurs

longueurs d'onde suivant le principe exposé au paragraphe IV.3.2. Lorsque $m(v)$ est déterminé, il reste à trouver la fonction $n(z)$ en essayant des fonctions paramétriques vraisemblables. Voyons, par exemple, la méthode qui peut être suivie lorsqu'on suppose que $n(z)$ est une fonction parabolique (fig. 33) d'équation

$$(31) \quad n_0 - n = z(z - 2e)/l^2,$$

les paramètres à déterminer étant e et l .

Quand on remplace dans (15) n par son expression donnée par (31), on obtient après intégration, dans le cas où les variations de n sont faibles,

$$(32) \quad \frac{m}{(2n)^{1/2}} \frac{\lambda l}{e^2} = \left[1 + (n_0 - v) \frac{l^2}{e^2} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{\pi}{2} + \text{Arc sin} \left[1 + (n_0 - v) \frac{\rho^2}{e^2} \right]^{-1/2} \right\} + (n_0 - v)^{1/2} \frac{l}{e}.$$

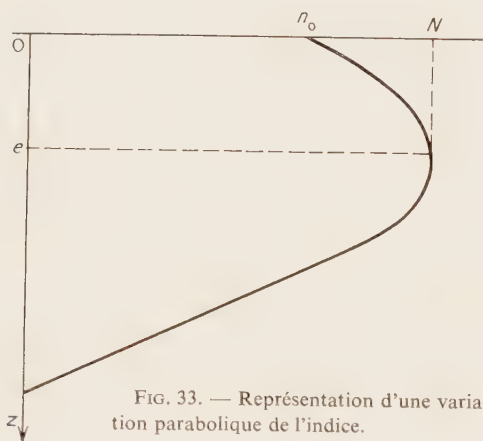


FIG. 33. — Représentation d'une variation parabolique de l'indice.

En faisant $n_0 - v = 0$ dans (32), on trouve une première relation à laquelle doivent satisfaire l et e :

$$(33) \quad \frac{m_0}{(2n)^{1/2}} \frac{\lambda l}{e^2} = \pi,$$

m_0 étant l'ordre d'interférence pour $v = n_0$.

L'équation (32) peut donc s'écrire, en posant $Y = \pi m/m_0$,

$$Y = \left[1 + (n_0 - v) \frac{l^2}{e^2} \right] \left\{ \frac{\pi}{2} + \text{Arc sin} \left[1 + (n_0 - v) \frac{l^2}{e^2} \right]^{-1/2} \right\} + (n_0 - v)^{1/2} \frac{l}{e}.$$

On voit que Y ne dépend que de la variable $X = (n_0 - v) l^2/e^2$. La courbe représentative de la fonction théorique

$$Y(X) = (1 + X) \left[\frac{\pi}{2} + \text{Arc sin} \frac{1}{(1 + X)^{1/2}} \right] + X^{1/2}$$

peut être tracée a priori.

La parabole d'équation (31) représente de façon satisfaisante $n(z)$ si le rapport $X/(n_0 - v)$ correspondant à des valeurs égales de la fonction théorique $m(X)$ et de la fonction expérimentale $\pi m(v)/m_0$ est constant. Ce rapport est alors égal à l^2/e^2 , ce qui détermine, avec (33), les paramètres e et l .

3. Schémas récapitulatifs. — On a rassemblé sur la figure 34 quelques résultats de la cinquième partie de cette étude en montrant l'allure des variations de m en fonction de $n_0 - v$ supposé petit dans les quatre cas suivants :

a) couche d'indice constant [équation (26)] ;

- b) gradient constant [équation (24)] ;
 c) répartition parabolique avec valeur maximale située en surface [équation (25)] ;
 d) répartition parabolique avec valeur maximale non située en surface [équation (32)].

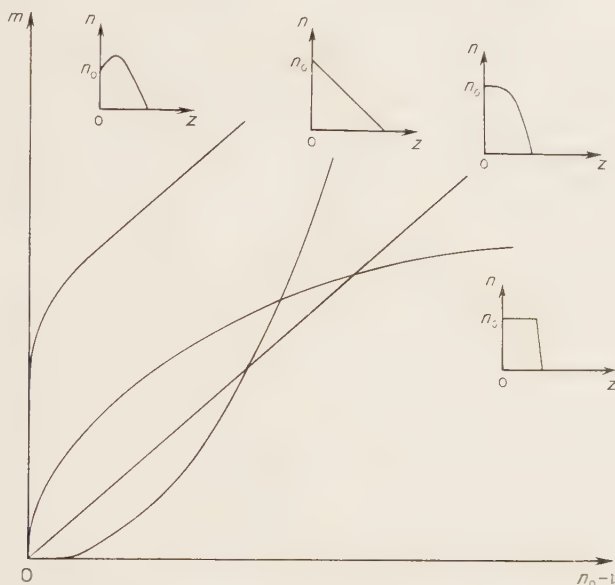


FIG. 34. — Variation de l'ordre d'interférence en fonction de l'incidence pour quatre types de milieux stratifiés.

Enfin on a représenté sur la figure 35 trois types de répartition d'indice avec, en regard, la propagation correspondante de la lumière en supposant toujours $n - v$ petit devant n .

A) CAS DU GRADIENT CONSTANT. — On a vu au paragraphe II.1 que la courbure du rayon vaut

$$\frac{1}{R} = -v \frac{dn}{n^2 dz}$$

et lorsque le gradient est faible,

$$\frac{1}{R} \simeq -\frac{1}{n} \frac{dn}{dz}.$$

On voit alors que la courbure peut être considérée comme indépendante de l'incidence et de la profondeur. Les trajectoires sont des arcs d'une même circonférence, d'autant plus grands que l'incidence est plus faible.

B) CAS DE LA COUCHE D'INDICE CONSTANT. — Les trajectoires sont évidemment rectilignes. Contrairement au cas précédent, le décalage entre deux ondes consécutives est d'autant plus grand que l'incidence est plus grande.

C) CAS DE LA RÉPARTITION PARABOLIQUE AVEC VALEUR MAXIMALE EN SURFACE. — On a vu que, dans ce cas, les franges sont équidistantes (§ V.1). D'autre part, on

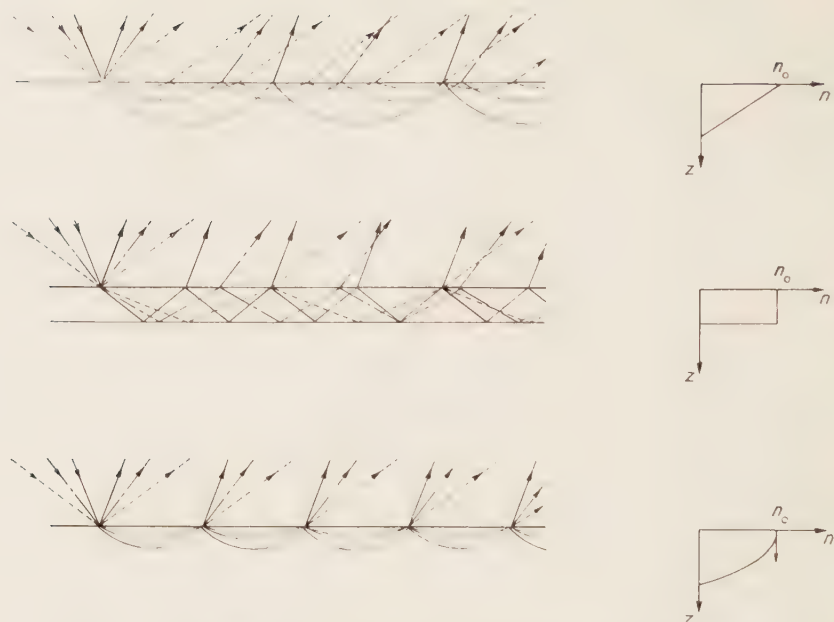


FIG. 35. — Propagation de la lumière dans trois types de milieux stratifiés.

sait [équation (14)] que le décalage entre deux ondes consécutives est inversement proportionnel à l'interfrange. Ce décalage est donc indépendant de l'incidence ; on réalise avec cette répartition d'indice un « stigmatisme » d'un genre particulier pour les points de la surface.

VI. Applications à l'étude des échanges ioniques dans les verres

1. Interprétation des variations de l'indice d'un verre par échange ionique. —

Pour pouvoir interpréter les informations que fournit la détermination de la répartition de l'indice de réfraction dans les verres ayant subi un échange ionique, il est nécessaire d'analyser schématiquement les diverses raisons pour lesquelles les échanges ioniques dans les verres peuvent amener une modification de l'indice de réfraction. Ces raisons sont au nombre de 3.

1. *Modification apportée à la composition du verre.* — Depuis Lorentz et Lorenz on admet qu'il existe une relation entre l'indice de réfraction n , la réfraction molaire R et le volume molaire V d'un corps :

$$(34) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{R}{V}.$$

La réfraction molaire d'un composé ionique est assez bien représentée par la somme des polarisabilités des ions qui le constituent [25]. De même, à un facteur de remplissage près pratiquement constant pour des compositions verrières voisines, le volume molaire est la somme des volumes des ions contenus dans une molécule de verre. Si donc une partie du sodium est remplacée ion par ion par un

autre alcalin dans la composition d'un verre, R et V varient linéairement avec la teneur en sodium et leur rapport $(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ varie de façon homographique.

2. Etat structural du verre. — Lorsque dans un verre au sodium, des sites primitivement occupés par des ions sodium deviennent occupés par des ions alcalins de nature, et donc de champ de forces, différents, le verre n'acquiert pas instantanément sa configuration d'équilibre.

Suivant Burggraaf [21], le déplacement de l'enveloppe d'ions oxygène entourant chaque nouvel ion ne se transmet pas aussitôt intégralement au reste du réseau. Il existe donc dans le verre des microrégions fortement déformées, centrées sur les nouveaux ions. Cette structure de haute énergie évolue vers la structure stable à la température de l'échange avec une vitesse conditionnée par la viscosité du verre. Une telle évolution est complexe car la viscosité dépend à la fois de la température, de la composition et de la structure du verre. Tant qu'elle n'est pas achevée, l'indice de réfraction du verre obtenu par échange d'ions varie au cours du temps en se rapprochant de l'indice de la configuration d'équilibre [6].

3. Contraintes mécaniques dans le verre. — L'échange ionique résultant d'un phénomène de diffusion, les diverses couches parallèles à la surface sont formées à chaque instant de verres différents. Elles ont donc des volumes molaires différents qu'elles ne peuvent occuper librement par suite de leurs liaisons. Il en résulte un état de contraintes stratifié qui varie au cours du temps à cause de l'interdiffusion ionique d'une part et de phénomènes de relaxation d'autre part. Cet état de contraintes rend le verre biréfringent par effet photoélastique.

2. Présentation du verre étudié. — Les expériences qui vont être décrites ont été pratiquées sur des échantillons de 120×40 mm en verre à vitre de 2 mm d'épaisseur dont la composition est la suivante :

oxydes	SiO ₂	SO ₃	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	CaO	MgO	Na ₂ O	K ₂ O
teneur pondérale	72	0,35	0,13	1,30	7,90	3,90	14,10	0,10
teneur moléculaire	71,30	0,25	0,047	0,71	8,39	5,75	13,40	0,05

La figure 36 représente, d'après Scholze [26], la variation de la viscosité de ce type de verre en fonction de la température.

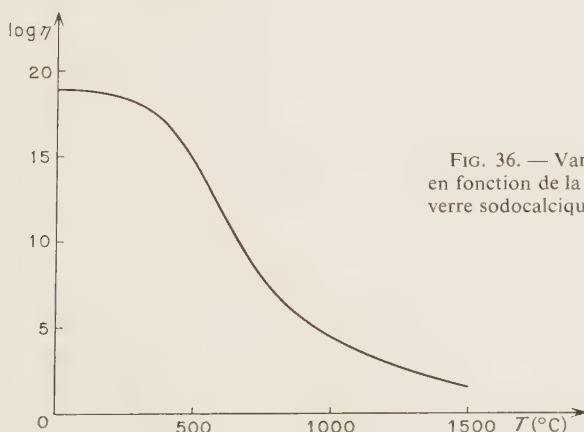


FIG. 36. — Variation de la viscosité en fonction de la température pour un verre sodocalcique commercial.

3. Interdiffusion $\text{Na} \rightleftharpoons \text{Li}$ de longue durée par rapport au temps de relaxation.

— Après un préchauffage dans l'air à 580°C pendant 10 mn, on plonge des échantillons dans un eutectique à 80 moles de Li_2SO_4 pour 20 moles de K_2SO_4 porté à 580°C pendant 5, 10 et 20 mn. A cette température, la viscosité η , d'après la figure 36, est de $10^{13,4}$ Po. En admettant, en première approximation, que le temps de relaxation τ de la structure de ce verre est $\tau = \eta/G$, où G est le module de cisaillement qui vaut environ $2 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$, on trouve que τ est de l'ordre de 2 mn donc inférieur aux durées des traitements. On peut donc supposer que le verre a eu le temps d'atteindre sa configuration d'équilibre dans les trois expériences et que, par conséquent, l'indice de réfraction est uniquement une fonction de la composition du verre. Or l'immersion des éprouvettes dans le sel fondu provoque un échange ionique. Comme la mobilité du lithium dans le verre sodocalcique est beaucoup plus grande que celle du potassium, le traitement a essentiellement pour effet un échange (Li^+ , Na^+) dans le verre, gouverné par les lois de la diffusion. Autrement dit, la concentration c en lithium vérifie l'équation

$$(35) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial c}{\partial z} \right),$$

où D est le coefficient d'interdiffusion qui peut être constant ou dépendre de la concentration.

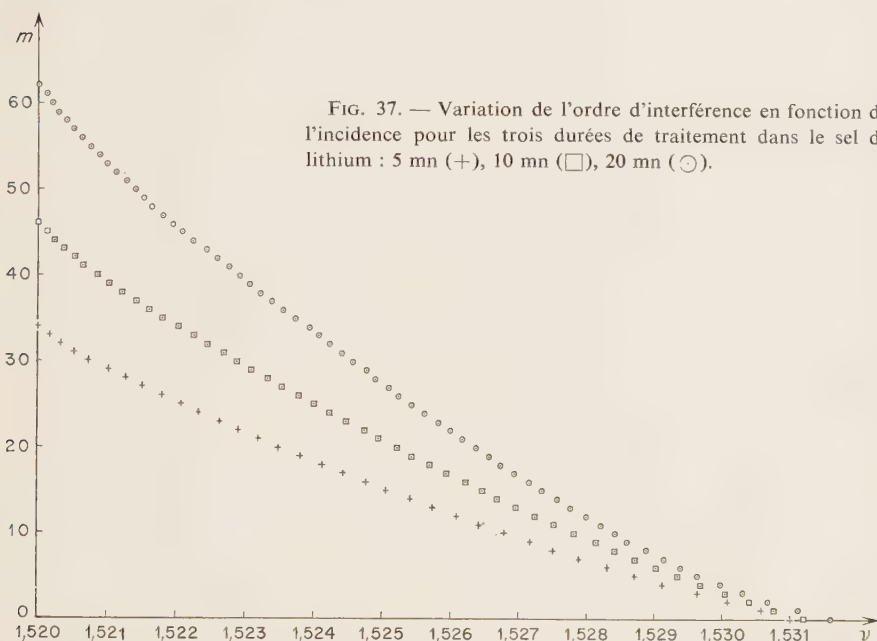
On peut montrer aisément [27] que, lorsque l'équation (35) est vérifiée, c ne dépend du temps t et de la profondeur z que par l'intermédiaire de la variable $u = z/\sqrt{t}$. Si donc l'indice n'est fonction que de la composition du verre, c'est-à-dire de la concentration en lithium, il peut aussi être représenté en fonction de $z/\sqrt{t}$. Pour contrôler la validité de ces hypothèses, on a déterminé la répartition de l'indice de réfraction dans les couches superficielles à l'aide du stratoréfractomètre. Sur la figure 37 on a représenté l'ordre d'interférence m des raies brillantes repérées dans l'instrument en fonction de l'incidence v pour les trois durées de traitement, lorsqu'on utilise la raie verte du mercure. On a admis que les raies d'ordre le plus élevé correspondaient, pour les trois échantillons, à une incidence v égale à l'indice du verre initial, pour lequel on a pris par commodité la valeur simple 1,520. D'autre part, les valeurs de v pour l'ordre $m = 0$ ont été obtenues en prolongeant les courbes expérimentales. On a pu vérifier, en utilisant une seconde radiation ($5\,879 \text{ \AA}$), que l'ordre de la première raie était bien l'ordre 1 pour chacun des trois échantillons.

L'allure régulière des courbes de la figure 37 nous permet de supposer une décroissance constante de l'indice à partir de la surface. Or nous avons vu, dans la cinquième partie, que la variation de l'indice est alors donnée par l'expression

$$z(n) = -\frac{\lambda}{\pi} \int_n^{n_0} \frac{m'(v) dv}{(v^2 - n^2)^{1/2}}.$$

L'intégration numérique de $m'(v)/(v^2 - n^2)^{1/2}$ a été réalisée à partir des valeurs expérimentales de $m(v)$ par le bureau mathématique de la Compagnie de Saint-Gobain à l'aide d'un ordinateur Gamma M40. Les résultats apparaissent sur la figure 38 où l'on a représenté l'indice en fonction de la variable $u = z/\sqrt{t}$. On peut

admettre que les courbes relatives aux trois durées de traitement se confondent dans la limite des erreurs dues à l'expérience et à la méthode d'approximation. On en déduit que l'indice de réfraction ne dépend que de la concentration en lithium, ce qui justifie l'hypothèse que le verre créé par échange d'ions a eu le temps de se stabiliser.



En supposant que la variation de l'indice est une fonction linéaire de la concentration en lithium et que le verre en surface ne contient comme alcalin que du lithium, nous pouvons calculer un coefficient moyen d'interdiffusion.

Lorsque la concentration en lithium vaut c_0 quel que soit t , à la surface du verre, la solution de l'équation (35) avec D constant, est [27]

$$c = c_0 \operatorname{erfc}(z/2\sqrt{Dt}),$$

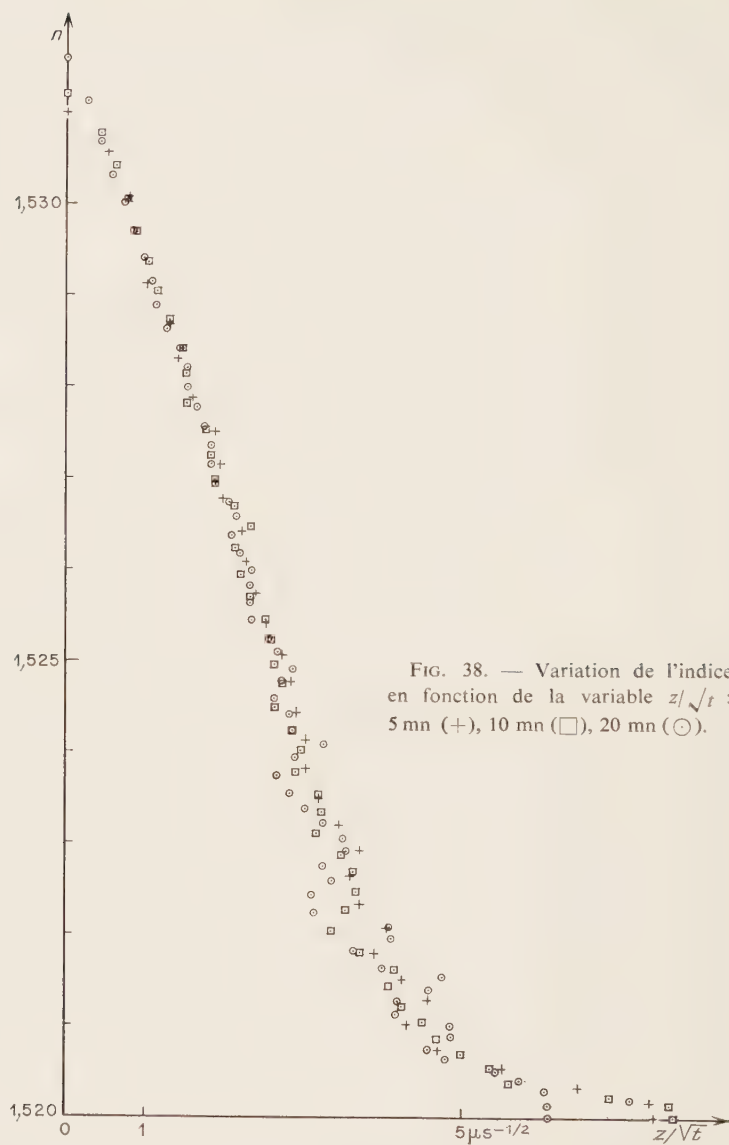
où

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du.$$

La quantité totale M de sodium qui a traversé l'unité d'aire du verre dans l'unité de temps est $M = 2c_0\sqrt{D/\pi}$. Or, en évaluant l'aire sous la courbe de la figure 38, on trouve que la quantité M d'ions Na est celle contenue dans $2,46\mu$ d'épaisseur de verre. On en déduit que $D = 4,9 \times 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{s}$. Cette valeur est à rapprocher de celle obtenue gravimétriquement à 574° C par Nebrensky & Kocik [28] qui ont trouvé, pour un verre de composition voisine, $D = 5,7 \times 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{s}$.

4. Interdiffusion $\text{Na} \rightleftharpoons \text{K}$ de courte durée par rapport au temps de relaxation. —

Dans un second type d'expérience, un échantillon du verre de base a été plongé



pendant 8 h dans un bain de nitrate de potassium à 400° C. D'après la figure 36, la viscosité du verre vaut à cette température 10^{17} Po et le temps de relaxation 140 h ce qui est grand par rapport à la durée du traitement. On doit donc s'attendre à ce que l'indice de réfraction dépende simultanément de la composition, de l'état structural et de l'état de contrainte du verre.

La figure 39 représente les variations de l'incidence en fonction de l'ordre d'interférence m pour la vibration parallèle et la vibration perpendiculaire au plan d'incidence et la figure 40 montre les deux répartitions d'indice qu'on en déduit

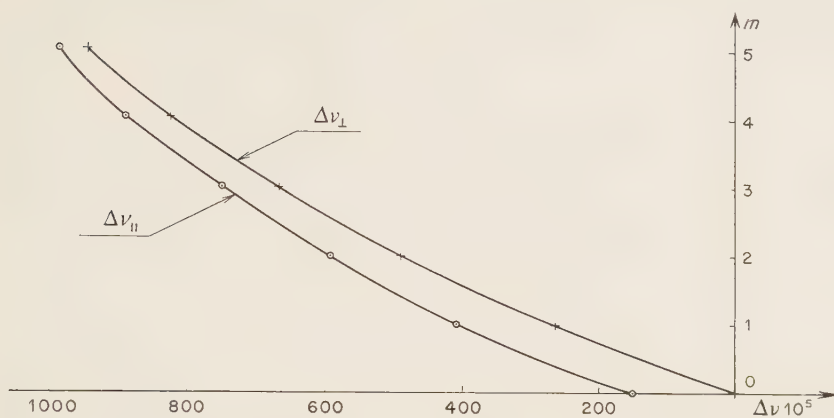


FIG. 39. — Variation de l'ordre d'interférence en fonction de l'incidence pour les deux vibrations principales dans le cas d'un traitement dans un sel de potassium à basse température.

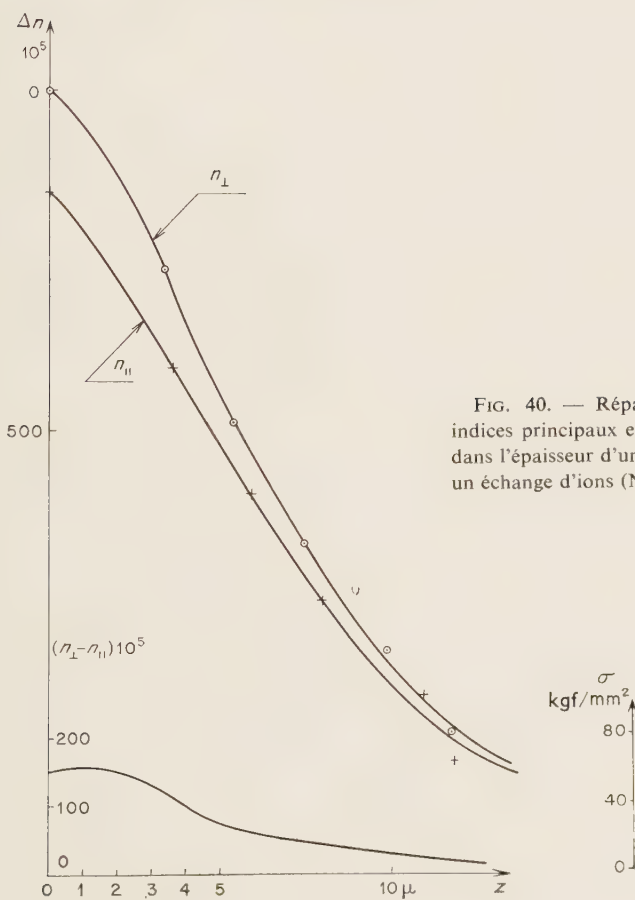


FIG. 40. — Répartition des deux indices principaux et de la contrainte dans l'épaisseur d'un verre ayant subi un échange d'ions ($\text{Na} \rightleftharpoons \text{K}$).

par intégration numérique ainsi que la répartition de la biréfringence traduite en contrainte en prenant comme valeur de la constante photoélastique

$$2,5 \times 10^{-5} \text{ mm}^2/\text{kgf}.$$

Nous avons montré, par ailleurs [6], que l'indice des couches où le potassium a diffusé diminue avec le temps en tendant vers l'indice du verre de même composition stable à la température du traitement ; simultanément les contraintes se relâchent et la biréfringence tend vers 0.

VII. Conclusions

Nous avons vu que les verres ayant subi des échanges ioniques constituent des milieux stratifiés permettant de réaliser très simplement des interférences à ondes multiples localisées à l'infini dans des conditions variées.

Puis nous avons montré qu'à partir de la disposition des franges dans l'interférogramme, il est possible de déterminer la répartition de l'indice de réfraction dans l'échantillon. Un appareil, le stratoréfractomètre, a été réalisé dans ce but.

L'interférométrie à ondes multiples étant une technique dont la mise en œuvre est rapide et qui ne nécessite qu'un appareillage simple, son application peut être envisagée pour l'étude de phénomènes autres que la diffusion ionique dans les verres : gradients de concentration dans les solutions, gradients de température dans les fluides, vieillissement de matières plastiques, ...

VIII. Appendice mathématique

Solution ⁽⁵⁾ de l'équation intégrale $m(v) = \frac{2}{\lambda} \int_0^z [n^2(u) - v^2]^{1/2} du$, z étant tel que $n(z) = v$. — On suppose la fonction n décroissante et dérivable. Dans ce cas, n admet une fonction inverse et l'on peut poser $n(u) = t$ et $u = f(t)$, d'où

$$m(v) = \frac{2}{\lambda} \int_{n_0}^v (t^2 - v^2)^{1/2} f'(t) dt,$$

en supposant $f'(t)$ continue $\forall t \in [v, n_0]$.

$\forall v \in [n_\infty, n_0]$, on peut écrire

$$m'(v) = -\frac{2}{\lambda} v \int_v^{n_0} \frac{f'(t) dt}{(t^2 - v^2)^{1/2}}.$$

(5) Cette solution est due à M. GOUDOT, du Bureau mathématique de la C^{ie} de Saint-Gobain.

Posons

$$g(n) = \int_n^{n_0} \frac{m'(v) dv}{(v^2 - n^2)^{1/2}} \quad \forall n \in [n_\infty, n_0],$$

$$g(n) = \frac{2}{\lambda} \int_n^{n_0} \left[\frac{v}{(v^2 - n^2)^{1/2}} \int_v^{n_0} \frac{f'(t) dt}{(t^2 - v^2)^{1/2}} \right] dv,$$

$$g(n) = \frac{2}{\lambda} \int_n^{n_0} \left[f'(t) \int_n^t \frac{v dv}{(v^2 - n^2)^{1/2} (t^2 - v^2)^{1/2}} \right] dt,$$

$$g(n) = \frac{\pi}{\lambda} \int_n^{n_0} f'(t) dt = \frac{\pi}{\lambda} \int_z^0 du = -\frac{\pi}{\lambda} z,$$

d'où la solution

$$z = -\frac{\lambda}{\pi} \int_n^{n_0} \frac{m'(v) dv}{(v^2 - n^2)^{1/2}}.$$

RÉFÉRENCES

- [1] Voir par exemple, la bibliographie de H. E. Rauscher, C. r. Symposium sur la surface du verre et ses traitements modernes, U.S.C.V., 1967.
- [2] P. LE CLERC, 4^{me} Congrès international du verre, Paris, 1956.
- [3] J. TOCHON, C. r. Ac. Sc., t. **260**, 1965, p. 4465 ; C. r. Ac. Sc. [C], t. **263**, 1966, p. 829.
- [4] E. W. SUCOV & R. R. GORMAN, *Jl. Amer. cer. Soc.*, t. **48**, 1965, p. 426.
- [5] G. YAMAGUCHI & al., *Jl chem. Soc. Jap.*, Ind. Chem. Sect., t. **69**, 1966, p. 1103.
- [6] C. GUILLEMET, J. M. PIERRE-dit-MERY & A. BONNETIN, C. r. Symposium sur la surface du verre et ses traitements modernes, U.S.C.V., 1967.
- [7] C. GUILLEMET & P. ACLOQUE, Colloque sur la nature des surfaces vitreuses polies, Paris, 1959.
- [8] H. OSTERBERG & L. W. SMITH, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **54**, 1964, p. 1078.
- [9] F. ABELÈS, *Ann. Physique* [12], t. **5**, 1950, p. 611.
- [10] A. MARÉCHAL, *Handbuch der Physik*, éd. Springer, Berlin, 1956, t. **24**.
- [11] M. BORN & E. WOLF, *Principles of optics*, éd. Pergamon Press, Oxford, 1959.
- [12] M. FRANÇON, *Handbuch der Physik*, éd. Springer, Berlin, 1956, t. **24**.
- [13] C. DUFOUR, *Jl Phys.* [8], t. **11**, 1950, p. 327.
- [14] C. DUFOUR, *Rev. Opt.*, t. **24**, 1945, p. 11.
- [15] P. ACLOQUE & C. GUILLEMET, C. r. Ac. Sc., t. **250**, 1960, p. 4328.
- [16] C. GUILLEMET & P. ACLOQUE, R. F. M. 1962, p. 157.
- [17] J. PAVAGEAU & S. TERGIMAN, C. r. Ac. Sc. [B], t. **263**, 1966, p. 352 et 856.
- [18] P. ACLOQUE & J. TOCHON, Symposium sur la Résistance Mécanique du Verre, Florence, 1961.
- [19] S. S. KISTLER, *Jl Amer. cer. Soc.*, t. **45**, 1962, p. 59.
- [20] M. E. NORDBERG & al., *Jl Amer. cer. Soc.*, t. **47**, 1964, p. 215.
- [21] A. J. BURGGRAAF, Thèse, Eindhoven, 1965.
- [22] C^{ie} de Saint-Gobain, *BF 1 313 282*.
- [23] C. GUILLEMET, Proc. Conf. optical Instrum., éd. Chapman & Hall, London, 1962, p. 406-408.
- [24] E. GEHRCKE, *Handbuch der physikalischen Optik*, Leipzig, 1926, t. **1**.
- [25] V. N. KONDRATIEV, La structure des atomes et des molécules, éd. Masson, Paris, 1964.
- [26] H. SCHOLZE, Glas : Natur, Struktur und Eigenschaften, Vieweg, 1965.
- [27] Voir, par exemple, Y. ADDA & J. PHILIBERT, La diffusion dans les solides, Bibliothèque des Sciences et Techniques nucléaires, 1966.
- [28] J. NEBRENSKY & J. KOCIK, 7^{me} Congrès international du verre, Bruxelles, 1965.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
SOMMAIRE	7
1. Introduction	8
1.1. Influence des échanges d'ions sur les propriétés des verres.	
1.2. Les méthodes d'examen des couches superficielles.	
2. Propagation de la lumière dans un milieu stratifié.	9
2.1. Généralités.	
2.2. Principe de la méthode de détermination de la répartition de l'indice de réfraction.	
3. Etude des interférences à l'infini des ondes réfléchies dans le milieu stratifié sous différentes conditions.	12
3.1. Toutes les ondes réfléchies sont recueillies par l'objectif.	
3.2. L'objectif ne recueille que les ondes réfléchies d'ordres élevés.	
3.3. L'objectif ne recueille pas l'onde réfléchie d'ordre 0.	
3.4. On déphase de π l'onde réfléchie d'ordre 0.	
3.5. Influence de la diffraction.	
3.6. Cas des milieux à stratifications non planes.	
4. Le strato-réfractomètre.	30
4.1. Choix des conditions d'interférence.	
4.2. Description du Strato-réfractomètre.	
4.3. Mode d'emploi du Strato-réfractomètre.	
5. Calcul de la répartition de l'indice de réfraction à partir de la phase des ondes réfléchies.	41
5.1. Cas où la variation de l'indice est toujours décroissante.	
5.2. Cas où la variation de l'indice n'est pas toujours décroissante.	
5.3. Schémas récapitulatifs.	
6. Applications à l'étude des échanges ioniques dans les verres	48
6.1. Interprétation des variations de l'indice d'un verre par échange ionique.	
6.2. Présentation du verre étudié.	
6.3. Interdiffusion $\text{Na} \rightleftharpoons \text{Li}$ de longue durée par rapport au temps de relaxation.	
6.4. Interdiffusion $\text{Na} \rightleftharpoons \text{K}$ de courte durée par rapport au temps de relaxation.	
7. Conclusions.	54
8. Appendice mathématique.	54

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Phénomènes de transport ionique dans les verres

Vu et approuvé :

Paris, le 10 juillet 1968

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

IVANOFF	T	Océanographie physique.	MM. DEDONDER	T	Biologie cellulaire.
FRANÇOIS		Zoologie.	DUFOUR	T	Electronique I. U. T.
TALBOT	T	Génie chimique.	SCHAAL		Chimie CPEM.
Mme NOUGAREDE		Botanique.	BAUCHOT		Anatomie comparée.
MM. BRUHAT	T	Mathématiques MPC.	LANCE		BV CPEM.
FOURNET		Electricité générale.	GIRAUD		Botanique E. N. S.
DEHEUVELS	T	Math. propédeutique.	HULIN		Génétique PC.
FURON	T	Géologie SPCN.	VIGIER		Physique.
Mme GANS	T	Génétique.	GUERN		Biologie végétale.
MM. GENEVES		Biologie végétale CPEM.	SLODZIAN		Physique CPEM.
HUPE	T	Pétrographie.	LACOMBE		Logique mathématique.
HOLLANDE	T	Biologie générale.	TAVLITZKI		Biologie cellulaire.
LIONS	T	Analyse numérique.	ARVIEU		Physique CPEM.
MAITTE	T	Chimie organique.	TAXI		B. A. CPEM.
NICOLAS		Géologie appliquée.	COLLENOT		B. A. CPEM.
PANIGEL		Biologie générale.	BASSELIER		Chimie propédeutique.
RAVIER	T	Pétrographie.	BADOUAL		Electronique I. U. T.
MOREL F.	T	Physiologie comparée.	AVEZ	T	Mathématiques pures.
ROSEAU	T	Mécan. théorique des fluides.	COMBES	T	Mathématiques appliquées.
ROUBINE	T	Electronique E. S. E.	DERVICHIAN	T	Biophysique.
SILBER	T	Chimie CPEM.	DUPEYRAT	T	Physique.
UEBERSFELD	T	Electronique.	FAUCHERRE	T	Chimie.
THIRY	T	Mécanique céleste.	MOTCHANE	T	Physique.
ABELES	T	Physique SPCN.	PALLU DE LA BARRIERE	T	Automatique théorique.
AMAT	T	Thermodynamique.	REVUZ	T	Mathématiques.
BALKANSKI		Physique M. P. C.	THIBAUT	T	Physiologie de la Reproduction.
LE CORRE	T	Electricité.	ALAIS		Mécanique.
NATAF	T	Physique nucléaire & radioact.	BEN AIM		Chimie 1 ^{er} cycle.
ECHALIER		Biologie animale CPEM.	BERREUR		Biologie cellulaire CPEM.
BARRAUD	T	Physique CPEM.	Mme BONNELLE		Physico-chimie des rayonne-
CAMEFORT		Botanique (aggrégation).			ments.
VICHNIEWSKY	T	Mécan. industrielle.	MM. BURGER		Physique.
SIGWALT		Chimie SPCN.	CANTACUZENE		Chimie CPEM.
BLAQUIERE		Automatique.	CASSIER		Biologie animale CPEM.
BARUCH		Physique propédeutique.	Mlle CATESSON		Biologie végétale.
ARNOUS	T	Physique théorique.	MM. CHEMLA		Electrochimie.
SLONINSKI		Génétique.	COUSSEMAN		Chimie CPEM.
MALLIAVIN	T	Math. propédeutique.	DESCOUBES		Physique.
GAUDEMAR		Chimie propédeutique.	Mme DEUTSCH		Mathématiques pures (ex chargé
BROUSSE	T	Mécanique théorique.			d'enseignt).
ROSCH	T	Astronomie.	MM. DIU		Physique.
GUY	T	Physique expérimentale.	DREUX		Biologie animale CPEM.
LAZARD	T	Mathématiques MPC.	GALIFRET		Psycho-physiologie.
MOREL P.		Physique MPC.	GELOSO		Biologie animale CPEM.
ARSAC		Programmation.	GLASON J.		Géologie structurale et géologie
LEFEBVRE	T	Chimie MPC.			appliquée.
BOK		Physique fondamentale.	GUERN		Physiologie végétale.
CHAPEVILLE		Biochimie.	JARD		Physiologie comparée.
BENOIT		Physique CPEM.	JOFFRIN		Physique fondamentale.
RIOT		Chimie CPEM.	LAGET		Psycho-physiologie.
JAUZEIN		Géologie ENS.	LAMEYRE		Géologie.
PREVOST G.		Biologie cellulaire.	LEFEBVRE R.		Physique.
FAVARD P.		Biologie animale CPEM.	Mlle MOURIER		Statistique.
Mme CHARNIAUX-COT-		Evol. des êtres organisés.	MAZLIAK		Biologie cellulaire CPEM.
TON			OMONT		Physique CPEM.
Mlle FICINI		Chimie CPEM.	OUДАР		Chimie.
MM. COHEN TANNODJI		Physique atomique.	PICON		Physiologie de la nutrition.
HERVE	T	Mathématiques.	PRUDHOMME		Chimie 1 ^{er} Cycle.
TAVERNIER		Physique PC.	QUEMADA		Physique.
DURAND M.		Biologie animale SPCN.	Mme RACCAUD		Zoologie.
PASCAUD		Physiologie.	MM. SAINT-JAMES		Physique Atomique.
Mme PETIT		Biologie animale CPEM.	SIGNOL		B. V CPEM.
MM. CAGNAC		Electricité.	TREMILLON		Chimie analytique.
FALK-VAIRANT		Physique nucléaire.	Mlle TRIBALAT		Chimie 1 ^{er} Cycle.
KRASNER	T	Mathématiques.	MM. VERDIER		B. A. CPEM.
BENZECCI	T	Statistiques.	VOELLE		Biologie animale.
VINH MAU		Physique M. G. P.	ZISMAN	T	Mathématiques.
DUQUESNES		Physique CPEM.	COURTILLOT		Informatique Boulevard Bes-
SCHUTZENBERGER	T	Programmation.			siers.
TREMILLON		Chimie MPC.	CRABOL	S	Electronique ville d'Avray.
FAYARD		Chimie MPC.	DUBUS		Génie électrique Cachan.
BUVET		Chimie CPEM.	ROBERT		Génie électrique Cachan.
AUTHIER		Minér. et cristallographie.	BERTIN		
BONNEFILLE		Electrotechnique.	GRUSON		
Mme PUISEUX DAO		Biologie végétale.	HACQUE		
M. BERGER	T	Géométrie supérieure.	KUMPERA		
Mlle LIBERMANN	T	Mathématiques.	SIBONY		
			DRESS		

Le Secrétaire Général..... R. POULLAIN.

